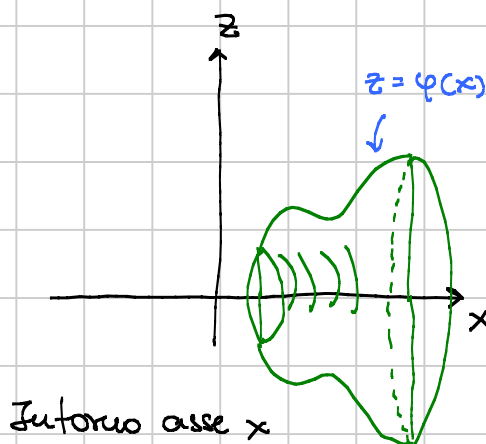
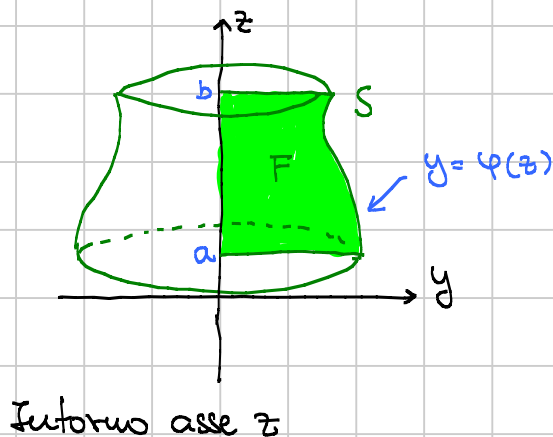


SOLIDI DI ROTAZIONE

Un solido di rotazione è il solido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ che si ottiene ruotando una figura piana F intorno ad un asse.

Di solito l'asse di rotazione è uno dei 3 assi coordinati.

Esempio



Come descrivo F e come descrivo S . Con riferimento al 1° caso (asse z)

$$F = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z) \}$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \underline{x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)} \}$$

cerchio con centro nell'origine
e raggio $\varphi(z)$: sarebbe la
sezione del solido ad altezza z .

La superficie laterale del solido è descritta da

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, x^2 + y^2 = \varphi^2(z) \}$$

Nel 2° caso (rotazione intorno all'asse x)

$$F = \{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq z \leq \varphi(x) \}$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq \varphi^2(x) \}$$

Data un'equazione, come capisco se descrive un solido di rotazione?

Devo guardare se ci sono 2 variabili, ad esempio x e y , che compaiono solo come x^2+y^2 (rot. intorno all'asse z)

Esempi

$$x^2+y^2+z=3$$

$$x^4+y^2+z^2=5$$

$$x^4+y^4+2x^2y^2+z^2=7$$

$$x^2+y^2 = \boxed{3-z} \quad \varphi^2(z)$$

Sol. Rot. z

$$y^2+z^2 = \boxed{5-x^4} \quad \varphi^2(x)$$

Sol. Rot. x

$$(x^2+y^2)^2 = 7-z^2$$

$$x^2+y^2 = \boxed{\sqrt{7-z^2}} \quad \varphi^2(z)$$

Sol. Rot. z

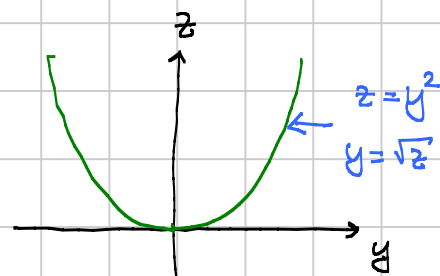
Oss. Un solido di rotazione si descrive bene in coordinate cilindriche (se ruota intorno all'asse z)

$$S: \quad a \leq z \leq b, \quad \underbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi}_{\text{rot. completa}}, \quad \underbrace{0 \leq \rho \leq \varphi(z)}_{\text{a } z \text{ fisso descrive il raggio della sezione } S_z}$$

Esempi

$$z = x^2+y^2 \quad (\text{paraboloid})$$

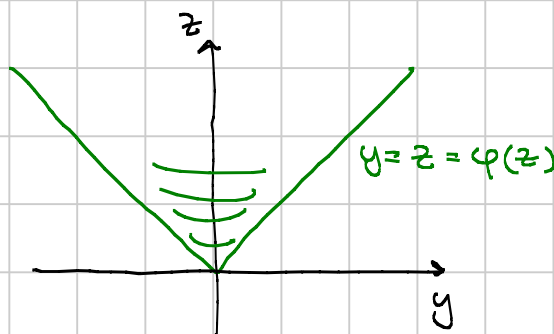
$$x^2+y^2 = z \leftarrow \varphi^2(z), \text{ quindi } \varphi(z) = \sqrt{z}$$



Cono

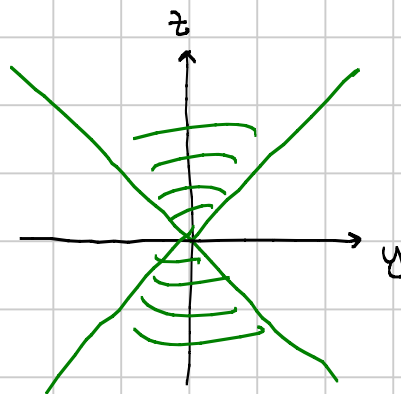
$$x^2+y^2 = \varphi^2(z)$$

$$\boxed{x^2+y^2 = z^2}$$



$$\text{Occhio } x^2+y^2 = z^2$$

Sarebbe la rotazione di $\varphi(z) = |z|$, quindi il "doppio cono"



Volume di un solido di rotazione

→ Formula "diretta"

→ Teorema GULDINO 1

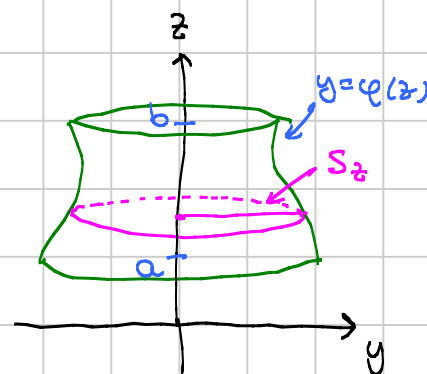
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, 0 \leq x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)\}$$

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) dz$$

Formula diretta

Dim.: Calcolo dell'integrale per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dy \, dz \\ &= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$



Ora S_z è un cerchio di raggio $\varphi(z)$, quindi $\text{Area}(S_z) = \pi \varphi^2(z)$

$$= \int_a^b \pi \varphi^2(z) \, dz = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz,$$

Achtung! Non confondere nell'equazione $\varphi(z)$ con $\varphi^2(z)$.

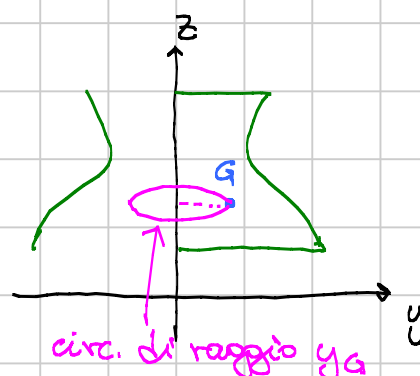
Teorema GULDINO 1

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Area della figura
F che ruota

coordinata y del
baricentro della figura
F che ruota

Volume Solido = Area figura che ruota ×
lunghezza della circ.
descritta dal baricentro
della figura durante
la rotazione



Dim. Dalle formule del baricentro

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{\text{Area}(F)} \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

Ma allora

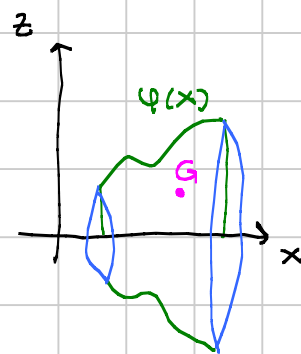
$$\begin{aligned} \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G &= \cancel{\text{Area}(F)} \cdot \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{\text{Area}(F)}} \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \quad \text{che è la formula diretta.} \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Praticamente:

- uso formula diretta quando conosco bene $\varphi(z)$
 - uso Guldino quando la figura che ruota è semplice.
- o --- o ---

Se sto ruotando intorno all'asse x

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \pi \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \\ &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi z_G \\ &\quad \text{--- o ---} \end{aligned}$$

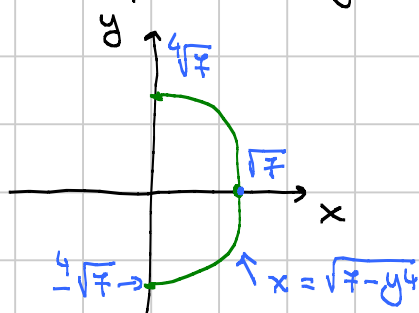


La formula $\text{Area}(F) \cdot 2\pi x_G$ è il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z .

--- o --- o ---

Esempio

$$x^2 + y^4 + z^2 \leq 7$$



$$\varphi(y) = \sqrt{7 - y^4}$$

$$x^2 + z^2 \leq \underbrace{7 - y^4}_{\varphi^2(y)}$$

Solido di rotazione
intorno all'asse y

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_{-\sqrt[4]{7}}^{\sqrt[4]{7}} (7 - y^4) \, dy$$