

BARICENTRI E MOMENTI DI INERZIA

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ una figura piana. Il baricentro di F è il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy \quad y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

Analogamente, per un solido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il baricentro ha coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S x \, dx \, dy \, dz \quad y_G = \dots \quad z_G = \dots$$

Il momento di inerzia di un solido S rispetto ad una retta r (pensata come asse di rotazione) è, a meno di costanti,

$$\iiint_S \underbrace{\text{dist}^2((x,y,z), r)}_{\substack{\text{dist}^2 \text{ del punto} \\ \text{dall'asse di rotazione}}} \, dx \, dy \, dz$$

Giustificazione rapida della formula per il baricentro.

Dati n punti materiali, tutti della stessa massa, $P_1, \dots, P_n$ il baricentro è definito da

$x_G =$ media delle coordinate x dei P_i

$y_G =$ " " " y dei P_i

Quindi, se $P_i = (x_i, y_i)$ si ha

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Se hanno masse m_i diverse, allora

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$y_G = \dots$$

Se ho una figura strana F , posso pensare di dividerla in tanti pezzi e poi approssimo ogni pezzo con un pito nel quale suppongo di aver concentrato la massa di tutto il pezzettino.

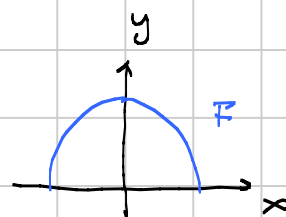


Se calcolo con la formula di sopra il baricentro dei punti approssimanti, trova al denum. l'area della figura, al numeratore delle somme $x(\text{punto}) \cdot \text{area del pezzo}$, ma questa è una somma di Riemann per $\iint_A x dx dy$. Idem per y_G .

— 0 — 0 —

Esempio 1 Baricentro di un semicerchio.

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$$



$$\text{Area}(F) = \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$x_G = 0$$

(per simmetria)

si vede anche dal fatto che

$$\iint_F x dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_F y dx dy &= \int_0^r dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \, p = \int_0^r p^2 dp \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \\ &= 2 \int_0^r p^2 dp = \frac{2}{3} r^3 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{\iint_F y}{\text{Area } F} = \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r$$

— 0 — 0 —

è ragionevole che stia sotto $\frac{r}{2}$ perché il cerchio è più grosso in basso.

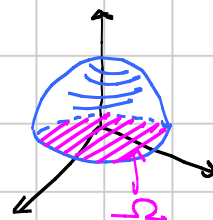
Esempio 2 Semisfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad z \geq 0$

Intanto per simmetria $x_G = y_G = 0$.

$$\text{Vol}(S) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$\iiint_S z dx dy dz$. Si può fare in vari modi

1° modo: normale risp. piano xy , cioè per colonne.



La proiezione è $\Omega = \text{cerchio con centro in } (0,0) \text{ e raggio } r$

Colonna su (x,y) è $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} z \, dz = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} dx \, dy [z^2]_{z=0}^{z=\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (r^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (r^2 - \rho^2) \rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 \rho - \rho^3) \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \int_0^r (r^2 \rho - \rho^3) \, d\rho = \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} r^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^r = \pi \left(\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{4} r^4 \right) = \frac{\pi}{4} r^4 \end{aligned}$$



2° modo: per sezioni

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^r dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_0^r z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz =$$

S_z è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - z^2}$, quindi $\text{Area}(S_z) = \pi(r^2 - z^2)$

$$= \pi \int_0^r z (r^2 - z^2) \, dz = \pi \int_0^r (r^2 z - z^3) \, dz = \frac{\pi}{4} r^4 \quad (\text{come prima})$$

3° modo: sferiche

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \underbrace{\int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}_{S \text{ in coord. sferiche}} \underbrace{\rho \sin \varphi}_z \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J \\ &= \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi/2} 2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho \underbrace{[\sin^2 \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}}_{=1} \\ &= \pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} r^4 \end{aligned}$$

Conclusione: $z_G = \frac{\int z \, dV}{Vol} = \frac{\pi}{4} r^4 \cdot \frac{3}{2\pi r^3} = \frac{3}{8} r$

Nel cerchio: $\frac{4}{3\pi} r$ Nella sfera $\frac{3}{8} r$

$\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi}$ $9\pi \stackrel{?}{<} 32$ Sì!

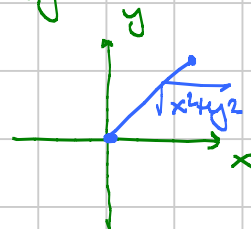
Il baricentro della semisfera è più basso del baricentro del semicerchio
(Brutalmente: una semisfera ha + massa in basso di un semicerchio)

Esempio 3 Calcolare il momento d'inerzia della sfera risp. all'asse z

$$\iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

Oss. La distanza di un pto (x, y, z) dall'asse z è $\sqrt{x^2 + y^2}$

Visto dall'alto



1° modo: sferiche

$$\int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \underbrace{\rho^2 \cos^2 \varphi}_{x^2 + y^2} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^r \rho^4 \, d\rho}_{\frac{1}{5} r^5} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} \pi r^5 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \text{si fa}$$

$$\int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \int \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \int (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi$$

2° modo: cilindriche. Una sfera in cilindriche si descrive

$$-r \leq z \leq r, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-r}^r dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \rho \, d\rho \underbrace{\rho^2}_{x^2 + y^2} \underbrace{\rho}_J = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r dz [\rho^4]_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r (r^2 - z^2)^2 \, dz \end{aligned}$$

Questo si fa... controllare che venga lo stesso.