

COORDINATE CILINDRICHE E SFERICHE NELLO SPAZIO

Coord. cilindriche

coord. cartesiane : (x, y, z)

" cilindriche : (ρ, θ, z) resta la quota
polari corrispondenti
a x e y

Esempio 1 L'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 3\}$
cilindro sollevato rispetto a terra
diventa

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 1 \leq z \leq 3$$

$\iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz$ ci sono almeno 3 metodi

→ per colonne: la base è il cerchio $x^2 + y^2 \leq 2$
la colonna è sempre $1 \leq z \leq 3$

prova a fare e
vedere che viene
lo stesso.

→ per sezioni: $\int_1^3 dz \iint_{S_z} dx \, dy \, x^2 z$
 $\uparrow$ la sezione è sempre
un cerchio

→ in coordinate cilindriche:

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 dz}_{A \text{ in coord. cilindriche}} \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta \cdot z}_{x^2 z \text{ in cilindriche}} \underbrace{\rho}_{\text{stesso } j \text{ delle polari nel piano}}$$

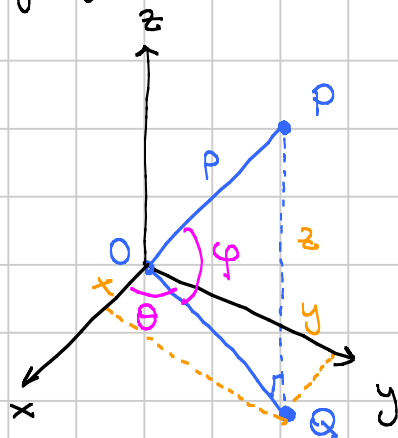
$x = \rho \cos \theta$
 $y = \rho \sin \theta$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_1^3 z \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=1}^{z=3}$$

$$= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{\pi} = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho = \pi [\rho^4]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.$$

COORDINATE SFERICHE (in versione "geografi")

(ρ, θ, φ)
↑
raggio
latitudine
longitudine



$$\rho = \text{length of } OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sia Q la proiezione di P sul piano xy

θ = angolo che OQ forma con il semiasse positivo delle z
(sarebbe il θ delle polari del p.to Q) (longitudine)

φ = angolo $\angle QOP$, cioè l'angolo che la retta OP forma con il piano xy (latitudine)

Dove variano?

$$\rho \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Casi speciali

- Non ha senso parlare di θ e φ dell'origine
- Non ha senso parlare di θ dei p.ti dell'asse z

Formule di passaggio Voglio x, y, z in funzione di ρ, θ, φ

$$z = PQ = OP \cdot \sin \varphi = \rho \sin \varphi$$

$$OQ = \rho \cos \varphi$$

$$x = OQ \cos \theta = \rho \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = OQ \sin \theta = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

Calcolo del pagamento:

① Ricavo $x, y, z \rightsquigarrow$ fatto sopra

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_p & x_\theta & x_\varphi \\ y_p & y_\theta & y_\varphi \\ z_p & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \dots$$

③ $J(\rho, \theta, \varphi) = |\text{Det}(\text{Matrice})| = \rho^2 \cos \varphi$

non c'è θ
→ c'è ρ^2 invece di ρ
→ c'è $\cos \varphi$ che è quello
che è sempre ≥ 0
su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Achtung!

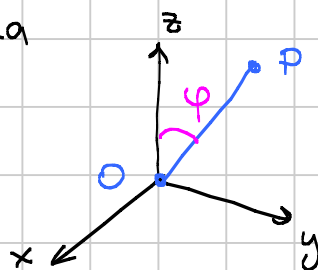
Non c'è accordo universale per le sfere.

Per i fisici, φ non è la latitudine, ma
è l'angolo tra OP ed il
semiasse positivo delle z .

Cosa cambia?

→ varia da 0 a π , quindi $\varphi \in [0, \pi]$

→ in tutte le formule $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ si scambiano,
compreso nel calcolo di J .



Qualcuno scambia pure θ e φ (vedi wiki in varie lingue).

Descrizione di insiemi in coordinate sferiche

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$$

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

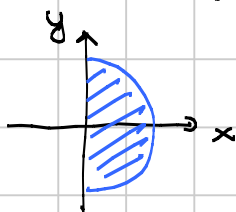
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0$$

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

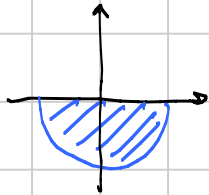
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \quad x \geq 0$$

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

↑
Dall'alto è così



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad y \leq 0, \quad z \geq 0$$



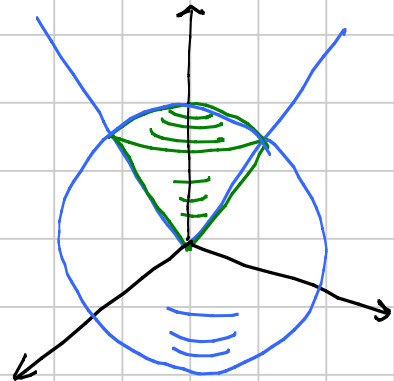
$$0 \leq \rho \leq 2, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

(opp. $-\pi \leq \theta \leq 0$)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

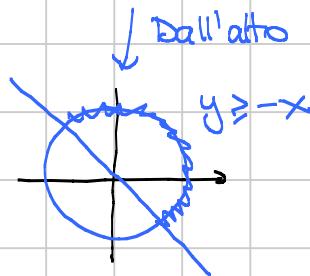
↑
dentro la sfera

↑
cono. La sezione
ad altezza z
è il cerchio di
raggio z



$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad z \leq 0, \quad x + y \geq 0$$



$$1 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \quad z \leq 0$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

— 0 — 0 —