

CAMBI DI VARIABLE IN GENERALE (Vale allo stesso modo per integrali doppi e tripli)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B g(u,v) J(u,v) du dv$$

u e v sono le nuove variabili

insieme A
nelle nuove
variabili

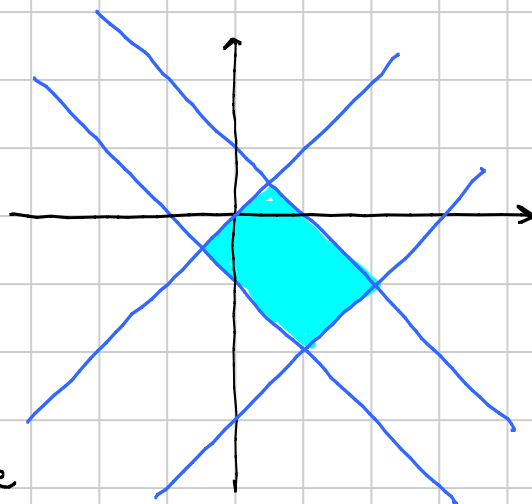
pagamento
funzione f
nelle nuove
variabili

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 3\}$
 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$-1 \leq x+y \leq 1 \quad -x-1 \leq y \leq 1-x$$

$$0 \leq x-y \leq 3 \leadsto y \leq x, y \geq x-3$$

$$x-3 \leq y \leq x$$



Voleudo A lo posso scrivere come unione di insiemi normali, ma è scomodo...

$$-1 \leq \underbrace{x+y}_u \leq 1, \quad 0 \leq \underbrace{x-y}_v \leq 3$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = u \cdot v$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_{-1}^1 du \int_0^3 dv$$

A nelle nuove variabili

uv
 f nelle nuove
variabili

$J(u,v)$
Da calcolare

Come calcolo il pagamento $J(u, v)$?

- ① Ricavo x e y
- ② Matrice jacobiana
- ③ Determinante

① Ricavo x e y : $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ Voglio trovare x e y in funzione di u e v

Sommo: $2x = u+v$, quindi $x = \frac{u+v}{2}$

Sottraggo: $2y = u-v$, quindi $y = \frac{u-v}{2}$

② Scrivo la jacobiana della trasformazione

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ $J(u, v) = |\text{Det}(\text{matrice})| = |-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$

Quindi l'integrale iniziale è diventato

$$\int_{-1}^1 du \int_0^3 dv \, uv \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u du \int_0^3 v dv = \frac{1}{2} \int_0^3 v dv \underbrace{\int_{-1}^1 u du}_{=0} = 0.$$

— 0 — 0 —

Osservazione In coordinate polari abbiamo

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad (\text{ricavo } x \text{ e } y)$$

Matrice jacobiana: $\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$

$$J(\rho, \theta) = |\text{Det}(\text{Matrice})| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho$$

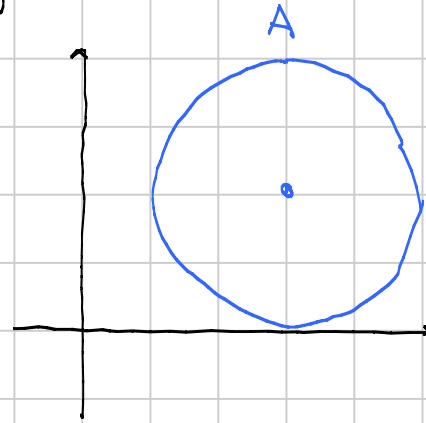
— 0 — 0 —

$\uparrow$ J delle coord. polari

Esempio 2 $A = \text{circ. con centro in } (3, 2) \text{ e raggio } 2$

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

$$\underbrace{(x-3)^2}_u + \underbrace{(y-2)^2}_v \leq 4$$



Faccio il cambio di variabili $u = x-3, v = y-2$
che equivale a spostare il centro nell'origine

$$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} \underbrace{(u+3)}_{\substack{\times \text{ nelle nuove} \\ \text{variabili}}} \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \, du \, dv$$

A nelle nuove variabili

① ricavo x e y in funzione di u e v : $x = u+3, y = v+2$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $J(u,v) = |\text{Det}(\text{Matrice})| = 1$

L'integrale è diventato $\iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+3) \, du \, dv =$

$$= \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} u \, du \, dv}_{\substack{0 \text{ per simmetria}}} + \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} 3 \, du \, dv}_{3 \cdot \text{Area} = 12\pi} = 12\pi.$$

— 0 — 0 —

Fatto generale da ricordare : se la trasformazione (cambio di variabili) è una traslazione, allora la matrice è sempre l'identità e quindi $J(u,v) = 1$.

— 0 — 0 —

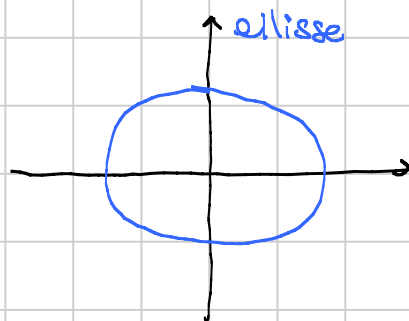
Esempio 3 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 4 \}$

$$\iint_A x^2 dx dy$$

$$2x^2 + 3y^2 \leq 4$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_u + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_v \leq 4$$

così ho $u^2 + v^2 \leq 4$



$$\iint_A x^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} \underbrace{\frac{u^2}{2}}_{x^2 \text{ nelle nuove coordinate}} J(u, v) du dv$$

Calcolo $J(u, v)$

① Ricavo x e y : $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$ $y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $J(u, v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Quindi integrale $= \frac{1}{2\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \leq 4} u^2 du dv$ (questo lo faccio in polari)

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \int_0^2 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$$

Fatto generale da ricordare : se la trasformazione è una affinità (Esempio 1 e 3) allora J è costante ed è il det. della matrice opportuna.

Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 4\}$

Potrei spazzarlo come insieme normale, ...

Voglio fare $\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy$

$x \leq y \leq 2x \leadsto$ posso dividere

$$1 \leq \underbrace{\frac{y}{x}}_u \leq 2 \quad 3 \leq \underbrace{xy}_v \leq 4$$

Quindi

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\substack{A \text{ nelle var.} \\ u \text{ e } v}} \underbrace{1}_{\text{funzione}} J(u,v)$$

① Ricavo x e y $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases}$ Moltiplico: $uv = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{uv}$
Divido $\frac{2^a}{1^a}$: $\frac{v}{u} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{v}{u}}$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}} \\ \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{\sqrt{u}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \left| -\frac{1}{4} \frac{1}{u} - \frac{1}{4} \frac{1}{u} \right| = \frac{1}{2u}$

e da qui si conclude ...

[Procedura alternativa] ① $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

② Faccio l'altra jacobiana $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$

③ Faccio l'altro det: $\left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = +2 \frac{y}{x} = 2u$

Il vero $J(u,v)$ è il reciproco ("Det matrice inversa").

