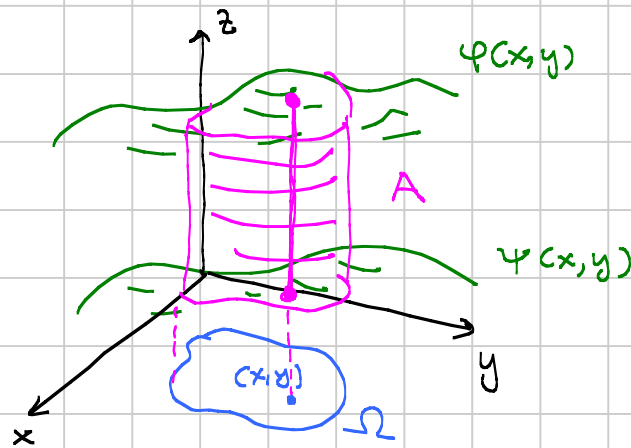


Formula di riduzione per colonne

$$3 = 2 + 1$$

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se è del tipo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$



L'insieme A è una specie di cilindro che ha base inferiore e superiore descritte dalle funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ e la superficie laterale che si proietta sul bordo di Ω .

La formula di riduzione è

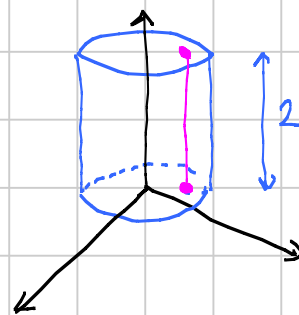
$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} dz \, f(x, y, z)$$

Brutalmente: • (x, y) variano in Ω , che sarebbe la proiezione di A sul piano xy .

• Fissato (x, y) in Ω , z varia tra $\psi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ e questa è la "colonna sopra" il pto (x, y) .

Esempio 1

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{(x, y) \text{ in un cerchio}}, \underbrace{0 \leq z \leq 2}_{\text{colonna}} \}$$



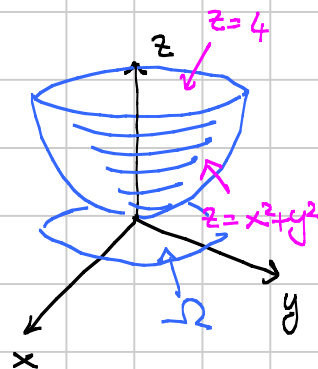
$$\iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^2 dz \, x^2 z = \iint_{\Omega} x^2 dx \, dy \int_0^2 z \, dz \dots$$

$\uparrow$ base $x^2 + y^2 \leq 1$ $\uparrow$ $z \in [0, 2]$ è la colonna su (x, y)

Esempio 2

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \}$$

z sopra il grafico di $x^2 + y^2$ z sotto quota 4



$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

Devo scrivere A come insieme normale rispetto al piano xy . Mi serve Ω , che sarebbe la proiezione di A sul piano xy .

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \} = \text{cerchio di raggio 2}$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \underbrace{x^2 + y^2}_{\psi(x, y)} \leq \underbrace{z}_{\varphi(x, y)} \leq 4 \}$$

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2 + y^2}^4 dz \, z^2$$

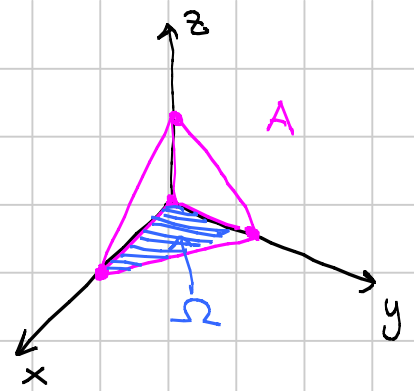
$\uparrow$ base $\uparrow$ estremi della colonna

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\underbrace{\frac{1}{3} z^3}_{\text{primitiva risp. a } z} \right]_{z=x^2+y^2}^{z=4} = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} [64 - (x^2 + y^2)^3] \, dx \, dy$$

$=$ integrale doppio...

Esempio 3 (Esercizio della tenda)

A = piramide con vertici in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$,
 $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

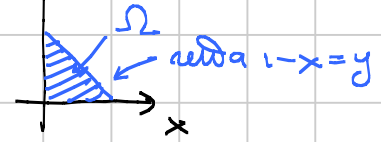


Come descrivo A come insieme normale
rispetto al piano xy .

La proiezione Ω è il triangolo in $\mathbb{R}^2$.

La colonna sul pto (x,y) è data da

segmento che va da $z=0$ all'eq. del piano $x+y+z=1$, cioè
 $z=1-x-y$



In conclusione

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in \Omega}_{\text{Base}}, \underbrace{0 \leq z \leq 1-x-y}_{\text{colonna su } (x,y)}\}$$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \underbrace{\iint_{\Omega} dx dy}_{\downarrow} \int_0^{1-x-y} dz f(x,y,z)$$

a sua volta Ω è normale rispetto asse x in $\mathbb{R}^2$

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy}_{\text{Scrittura di } \Omega \text{ come normale risp. asse } x.} \int_0^{1-x-y} dz f(x,y,z)$$

Formula di riduzione per sezioni

$$3 = 1 + 2$$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} dx dy f(x,y,z)$$

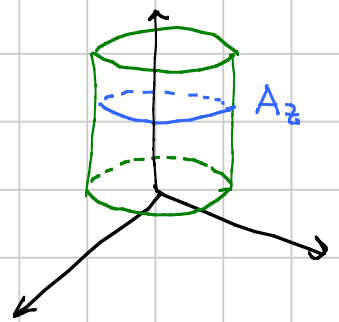
z varia tra a e b

a = minima quota di A
 b = massima quota di A

Sezione di A a
quota z

Esempio 4 $\iiint_A z^2 dx dy dz$

A = cilindro dell'esempio 1



$$= \int_0^2 dz \iint_{A_z} dx dy z^2$$

z nell'integrale A varia tra 0 e 2

sezione ad altezza $z =$
intersezione tra A ed il piano
a quota z

Qualunque sia z la sezione A_z è un cerchio di raggio 1.

Quindi
$$= \int_0^2 dz \iint_{A_z} z^2 dx dy = \int_0^2 z^2 dz \underbrace{\iint_{A_z} dx dy}_{\text{Area}(A_z) = \pi}$$

$$= \pi \int_0^2 z^2 dz = \pi \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=2} = \frac{8}{3} \pi$$

Esempio 5 = Esempio 2 fatto per sezioni

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \int_0^4 dz \iint_{A_z} dx dy z^2$$

$$= \int_0^4 z^2 dz \iint_{A_z} dx dy = \int_0^4 z^2 dz \cdot \text{Area}(A_z)$$

A_z è un cerchio di raggio $\sqrt{z}$

$$= \int_0^4 z^2 \underbrace{\pi z}_{\text{Area}(A_z)} dz = \pi \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=4} = 64 \pi$$

