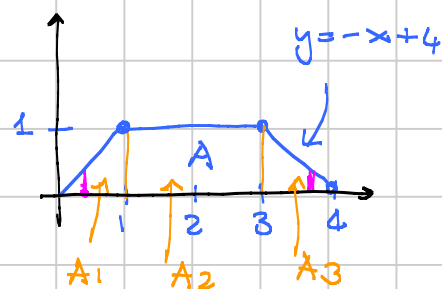


ANALISI 2 — LEZIONE 24

Titolo nota

27/03/2014

Esempio 1 Il trapezoido A è
l'unione di 3 insiemi normali
rispetto all'asse x :



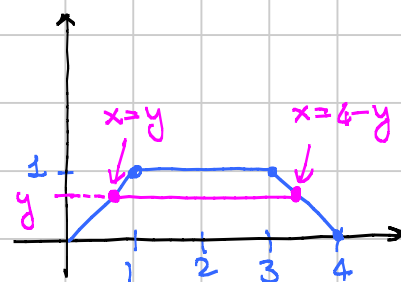
$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4-x\}$$

Visto come insieme normale rispetto all'asse y diventa

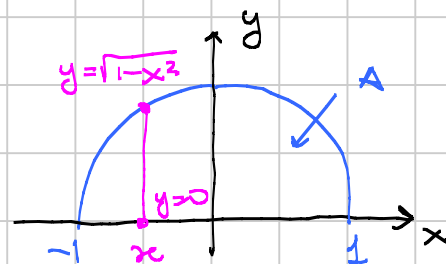
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 4-y\}$$



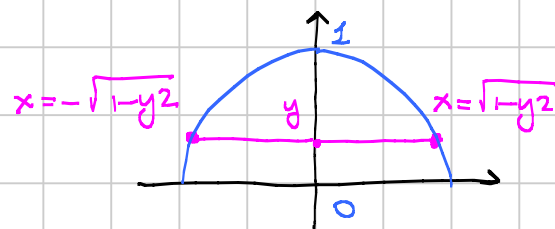
Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Normale rispetto asse x :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$



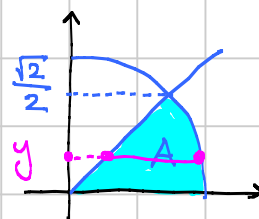
Normale rispetto asse y :



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

Esempio 3 Normale risp. asse x : due pezzi
Normale rispetto asse y :

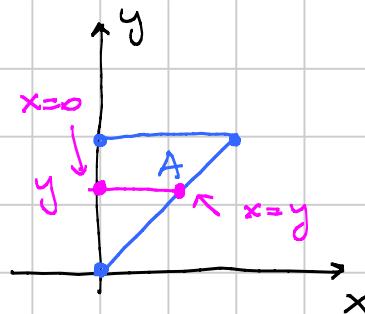
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$



Esempio 4

$A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (0,1), (1,1)$

$$\iint_A x e^{y^3} dx dy$$



Normale risp. asse x : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$

$$\text{Quindi } \iint_A x e^{y^3} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy x e^{y^3} = \int_0^1 x dx \int_x^1 e^{y^3} dy$$

... non so fare la primitiva di e^{y^3} 😞

Provo a vedere che succede con normale rispetto asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\text{Quindi } \iint_A x e^{y^3} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx x e^{y^3} = \int_0^1 e^{y^3} dy \int_0^y x dx$$

$$= \int_0^1 e^{y^3} dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=y} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^3} (y^2 - 0) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{6} [e^{y^3}]_0^1 = \frac{1}{6} (e - 1).$$



Esempio 5

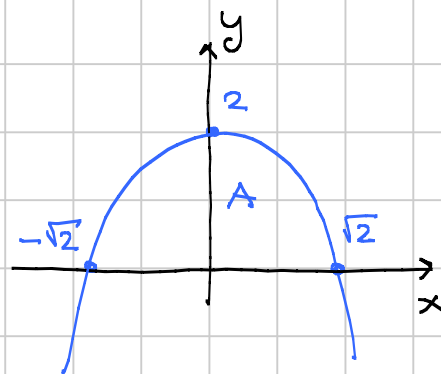
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

sopra asse x y sotto parabola

$$f(x,y) = x + y^2$$

$A = \text{normale risp. asse } x =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$$



$$\iint_A (x + y^2) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} dy (x + y^2) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left[xy + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=2-x^2}$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left[x(2-x^2) + \frac{1}{3}(2-x^2)^3 \right] = \text{sono conti con polinomi.}$$

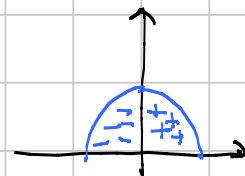
Un paio di scorciatoie: USO DELLE SIMMETRIE

① $\iint_A x \, dx \, dy = 0$ (facendo i conti si vede)

Ma si poteva vedere da subito perché

→ l'insieme A è simmetrico risp. asse y

→ se cambio x con $-x$ la funzione cambia segno



② $\iint_A y^2 \, dx \, dy = 2 \iint_{A_1} y^2 \, dx \, dy$ dove A_1 è la metà destra di A

Questo segue dal fatto che

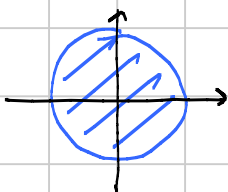
→ l'insieme A è simmetrico risp. asse y

→ se cambio x con $-x$ la funzione resta la stessa.

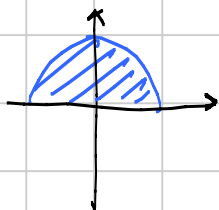
Analisi 1

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} \int_0^a f(x) \, dx & \text{se } f(x) \text{ è dispari} \\ 2 \int_0^a f(x) \, dx & \text{se } f(x) \text{ è pari} \end{cases}$$

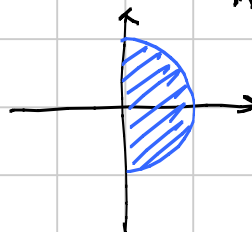
Esempio 6 Su quali insiemi A si ha che $\iint_A x \, dx \, dy = 0$



SI



SI



NO qui viene > 0 e viene 2 volte quello su

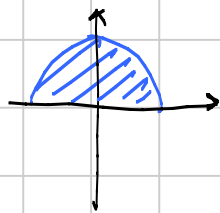
Stessa cosa se fosse $\iint_A x^3 \, dx \, dy$ o $\iint_A \arctan x \, dx$. Sono funzioni DISPARI

Esempio 7

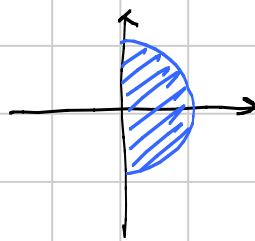
$$\iint_A xy \, dx \, dy$$



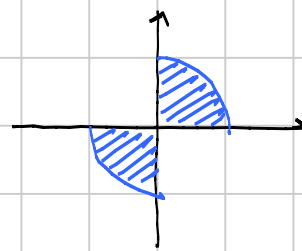
SI



SI



SI



NO viene > 0

- A simm. asse y
- se cambio x con $-x$
la funz. cambia segno

- A simm. asse x
- se cambio y con $-y$
la funz. cambia segno

Stessi insieme con $\iint_A x^5 y^6 \, dx \, dy$

SI

- A simm. asse y
- se cambio x con $-x$

SI

stesso motivo

NO viene > 0

SI

- A ha simmetria centrale:
 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- se cambio (x, y)
con $(-x, -y)$ la
funzione cambia
segno.

— o — o —