

INTEGRALI DOPPIIntegrali per funzioni di 2 variabili $f(x, y)$

- ① Come si indicano?
- ② Qual è il significato geometrico?
- ③ Come si definiscono?
- ④ Come si calcolano?

1 NOTAZIONE

$\iint_A f(x, y) dx dy$

→ variabili rispetto a cui si integra
 integranda: funzione che si integra
 zona di integrazione: insieme su cui si integra
 integrale doppio

Ingredienti fondamentali:

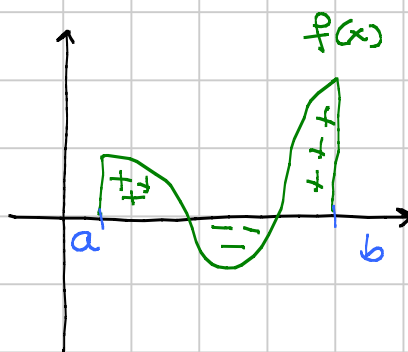
- insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO (zona di integrazione)
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funzione LIMITATA ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x, y)| \leq M$ per ogni $(x, y) \in A$)

SE ci sono i 2 ingredienti fond, l'integrale si dice **PROPRIO**, se ne manca almeno uno l'integrale si dice **IMPROPRIO**.

Notazione più rapida: $\int_A f(x, y) dx dy$ (si capisce dal resto che è doppio).

2 Significato geometrico**Analisi 1**

$\int_a^b f(x) dx =$ area con segno della
 parte di piano
 compresa tra asse x e
 grafico di $f(x)$



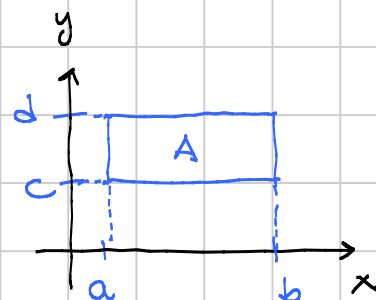
Analisi 2

$\iint_A f(x,y) dx dy =$ se $f(x,y) \geq 0$ sempre allora è il volume della parte di spazio compresa tra il piano xy ed il grafico di $f(x,y)$ e limitata lateralmente da pareti verticali che si proiettano sul bordo di A .
Se $f(x,y)$ ha segno qualunque le parti sotto il piano xy contano con il segno $-$.

3 Come si definirebbero Tre fasi:

- caso banale
- caso semibanale
- caso generale.

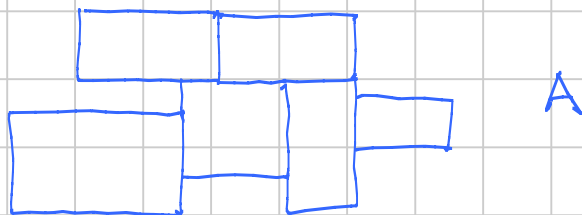
Caso banale : $A = [a,b] \times [c,d]$, cioè un rettangolo con dati // agli assi
 $f(x,y) = \lambda$ costante in A



In questo caso $\iint_A f(x,y) dx dy = \lambda \cdot \text{Area}(A) = \text{volume con segno del parallelepipedo}$
 $= \lambda (b-a)(d-c)$

Caso semibanale : $A =$ unione disgiunta di rettangoli come sopra

← nel senso che i rett. possono avere tratti di lato in comune, ma non parti interne



$f(x,y) =$ costante, eventualmente diversa da rettangolo a rettangolo

Il grafico di $f(x,y)$ è "un sistema di mattoni" uno vicino all'altro

Più formalmente $A = \bigcup_{i=1}^n R_i$ $\uparrow$ rettangoli $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

e $f(x, y) = \lambda_i$ per ogni $(x, y) \in R_i$

$$\begin{aligned} \text{In questo caso } \iint_A f(x, y) dx dy &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - a_i)(d_i - c_i) \end{aligned}$$

Caso generale Sia ora A un qualunque insieme LIMITATO e sia $f(x, y)$ una qualunque funzione LIMITATA.

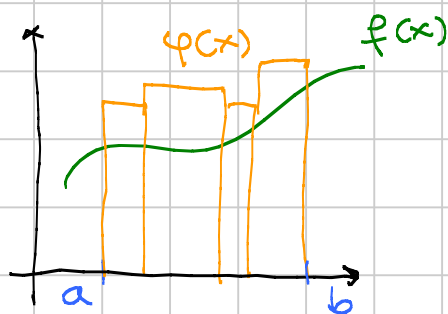
Per prima cosa considero $f(x, y)$ definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ponendola uguale a 0 per ogni $(x, y) \notin A$.

Si definisce l'INTEGRALE SUPERIORE

$$I^+(f, A) = \inf \left\{ \iint_A \varphi(x, y) dx dy : \varphi \text{ è una funzione semibornata e } \varphi(x, y) \geq f(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

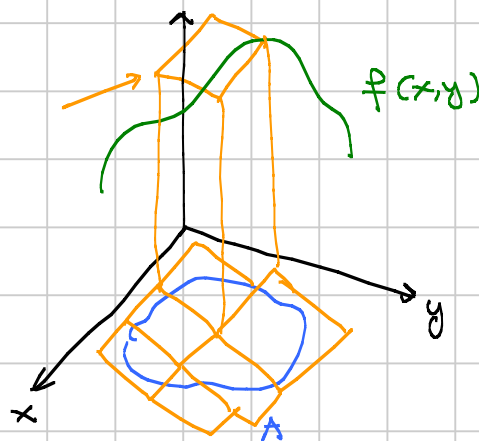
Bruttalmente: sto inglobando il volume da calcolare in una unione finita di parallelepipedi come nel caso semibornato e cerco di farlo "sprecaendo meno possibile" $\leftarrow$ inf.

Analisi 1



questi parallelepipedi contengono il volume che interessa

Analisi 2



Analogamente si definisce l'INTEGRALE INFERIORE

$$I^-(f, A) = \sup \left\{ \iint_A \varphi(x, y) dx dy : \varphi(x, y) \text{ è di tipo semi-basale e } \varphi(x, y) \leq f(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Teorema (abbastanza facile e intuitivo) Per ogni A limitato e per ogni f limitata si ha che

$$I^-(f, A) \leq I^+(f, A)$$

Oss. Esistono esempi di funzioni f "strane" per cui vale il $<$ stretto.

Def. Una funzione $f(x, y)$ si dice integrabile secondo RIEMANN su A se

$$I^-(f, A) = I^+(f, A)$$

Terminologia :

- Somme di Riemann inferiori / superiori : quelle usate nella def. di integrale inferiore / superiore.
- Funzioni a gradino, funzioni semplici, step functions : quelle del caso semi-basale.

Teorema Se $f(x, y)$ è continua e limitata in A , allora f è integrabile secondo Riemann in A .

Oss. Dove ho usato che f ed A sono limitati?

Senza per essere sicuri che

- esista una step function $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ ovunque
- " " " " $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ "

(ogni funzione f limitata in un insieme A limitato è contenuta in un rettangolo esatto).

— o — o —

Proprietà dell'integrale

① Linearità $\iint_A [f_1(x,y) + f_2(x,y)] dx dy = \iint_A f_1 + \iint_A f_2$

$$\iint_A c f(x,y) dx dy = c \iint_A f(x,y) dx dy$$

② Monotonia se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$, allora

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_A g(x,y) dx dy$$

In particolare, se $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$, allora per forza

$$\iint_A f(x,y) dx dy \geq 0.$$

③ Additività rispetto alla zona di integrazione

o che si toccano solo sul bordo.

Se $A \cap B = \emptyset$, allora

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A f + \iint_B f$$

— o — o —