

ANALISI 2 — LEZIONE 21

Titolo nota

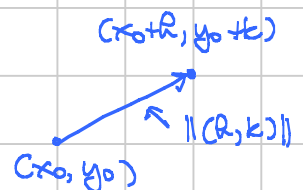
21/03/2014

Formula di Taylor in 2 variabili con centro in (x_0, y_0) e $n=2$

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) \\ &+ f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] \\ &+ o(\underbrace{h^2+k^2}_{\uparrow \rho^2}) \end{aligned}$$

Questo si ricava da quella in dimensione.

Considero la funzione



$$g(t) = f(\underbrace{x_0+ht, y_0+kt}_{\text{retta per } (x_0, y_0) \text{ in}})$$

direzione (h, k) : volendo $(x_0, y_0) + t(h, k)$

Taylor di Analisi 1 dice che

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)$$

Ora $g(0) = f(x_0, y_0)$

$$g'(t) = f_x(x_0+ht, y_0+kt) \cdot h + f_y(x_0+ht, y_0+kt) \cdot k$$

↑
CHAIN RULE

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k$$

Analogamente: $g''(t) = f_{xx}(\dots)h^2 + f_{xy}(\dots)hk + f_{yx}(\dots)hk + f_{yy}(\dots)k^2$

$$g''(0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

Sostituendo le espressioni di $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$ nello sviluppo di Taylor di $g(t)$ ottengo

$$\begin{aligned} f(x_0 + R t, y_0 + k t) &= f(x_0, y_0) \\ &+ [f_x(x_0, y_0) R + f_y(x_0, y_0) k] t \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(\dots) R^2 + 2 f_{xy}(\dots) R k + f_{yy}(\dots) k^2] t^2 \\ &+ O(\dots) \end{aligned}$$

$g(0)$
 $g'(0)t$
 $\frac{1}{2} g''(0)t^2$

Basta mettere $t=1$ e si ottiene lo sviluppo di Taylor voluto per f .

Facendo il conto di $g''(t)$ è venuto fuori

$g''(t) =$ forma quadratica associata a $Hf(x_0, y_0)$
calcolata nel vettore (R, k) .

Supponiamo (x_0, y_0) stazionario, cioè $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Allora $g'(0) = 0$ ($g(t)$ = quota a cui si trova l'unico che percorre la retta $(x_0, y_0) + t(R, k)$)

Quindi l'unico vale

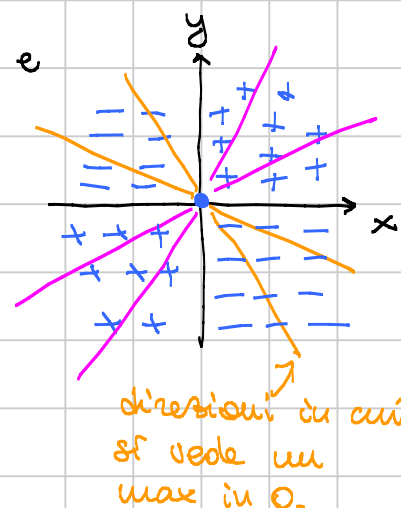
- un minimo se $g''(0) > 0$, cioè se (R, k) è una direzione in cui $Hf(x_0, y_0)$ è positivo
- un massimo se $g''(0) < 0$, cioè se $(R, k) \dots Hf(x_0, y_0)$ è negativo.

Esempio $f(x, y) = xy$ Qui $(0, 0)$ è stazionario e

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le direzioni nel 1° e 3° quadrante

possono vedere un minimo in $(0, 0)$ e sono i sottospazi su cui Hf è > 0



Esercizio 1 $f(x,y) = x^2y^2 + \sin y^5$

Si vede che l'origine è stazionario: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

Si tratta di p.to di max/min?

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Borinamente: calcolare derivate seconde]

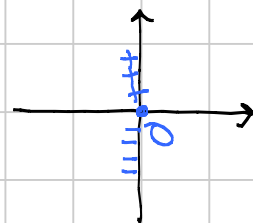
Astutamente: Taylor in $(0,0)$ non ha termini di grado 2]

Il primo termine di Taylor è sul grado 4 ed è $x^2y^2 \geq 0$ sempre.

L'altro termine è o piccolo e viene mangiato. Quindi

$f(x,y) \geq 0$ vicino all'origine per cui $(0,0)$ è p.to di min. locale.

NO!!! Basta mettere $x=0$ e diventa $f(0,y) = \sin y^5$ che per y negativi piccoli (vicini a 0) è negativa. Questo dice che $(0,0)$ non è né p.to max né p.to di min.



Morale: guardare il primo termine di Taylor può essere pericoloso.

Esempio 2 $f(x,y) = \cos x + \sin(xy)$

$(0,0)$ è un p.to stazionario

$$f_x(x,y) = -\sin x + y \cos(xy)$$

$$f_y(x,y) = x \cos(xy)$$

$$f_{xx}(x,y) = -\cos x - y^2 \sin(xy)$$

$$f_{yy}(x,y) = -x^2 \sin(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - yx \sin(xy)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det = $-1 < 0 \Rightarrow$ segnatura $+-$
 $\Rightarrow$ p.to di sella

Si vedeva con Taylor? Sì:

$$f(x,y) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2}_{\cos x} + \underbrace{xy}_{\sin(xy)} + o(x^2+y^2)$$

moltiplico per 2.

La forma quadratica assoc.

a $Hf(0,0)$ è

$$-x^2 + 2xy$$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + \arctan(xy)$ inf / sup su $\mathbb{R}^2$

Facile: sup = $+\infty$ ($y=0$, x enorme)

Se fossimo sul 1° quadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) avremmo inf = min = 0,
e quanto $f(x,y) \geq 0$ sempre nel 1° quadrante e
 $f(x,y) = 0$ se e solo se $x=0$

Può essere inf = min = 0 su $\mathbb{R}^2$? L'origine è stazionaria e

la forma quadratica in $(0,0)$ è $x^2 + xy$

che ha autovalori ++, quindi l'origine è

un p.to di min. locale. $\uparrow$ No è +-, quindi è una sella (corretto dopo video)

Se voglio $f(x,y)$ neg, mi serve $x \sim 0$ e xy molto negativo.

Basta prendere $y = -\frac{1}{x^2}$ e $x \sim 0$

Otengo

$$f(x, -\frac{1}{x^2}) = x^2 + \arctan(-\frac{1}{x})$$

quando $x \rightarrow 0^+$, la funzione tende a $-\frac{\pi}{2}$ che è proprio l'inf
(sotto non si può andare).

— o — o —

