

ANALISI 2 - LEZIONE 20

Titolo nota

21/03/2014

Analisi 1 $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. locale

Dim 1 Taylor con centro in x_0 : $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + r(h)$
 per ipotesi $r(h) = o(h^2)$, cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Ma allora per h vicino a 0, diciamo per $h \in (-\delta, \delta)$ per un opportuno $\delta > 0$ si ha che



$$\frac{r(h)}{h^2} \leq \frac{1}{4} f''(x_0) \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \quad (\text{cioè } r(h) \leq \frac{1}{4} f''(x_0) h^2)$$

$$\frac{r(h)}{h^2} \geq -\frac{1}{4} f''(x_0) \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \quad (\text{cioè } r(h) \geq -\frac{1}{4} f''(x_0) h^2)$$

Ma allora per $h \in (-\delta, \delta)$ avremo che

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)}_0 h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + r(h) \\ &\geq \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 - \frac{1}{4} f''(x_0) h^2 \\ &= \frac{1}{4} f''(x_0) h^2 > 0 \text{ per } h \neq 0 \end{aligned}$$

Ho così dimostrato che $f(x_0 + h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, \delta)$ con $h \neq 0$, il che dice che x_0 è un p.to di min. locale.

(stessa dim. nel caso in cui $f''(x_0) < 0$: fare per esercizio).

Analisi 2 Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0 \leftarrow$ vettore nullo
 e $Hf(x_0) > 0$
 $\uparrow$ matrice Hessiana definita positiva

Allora x_0 è p.to di minimo locale.

Fatto 1 Sia A una matrice definita positiva. Sia $m > 0$ il più piccolo dei suoi autovalori.

Allora $x^t A x \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim. Se A fosse diagonale sarebbe ovvio: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$x^t A x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \geq m (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = m \|x\|^2$$

↑
sostituisco ogni λ_i con il più piccolo che è proprio m

Se A non è diagonale, la rendo tale! Per il teorema spettrale, esiste M matrice ortogonale ($M^t = M^{-1}$) tale che $M A M^t = D \leftarrow$ diagonale
cioè $A = M^t D M$. Ma allora

$$x^t A x = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx) \geq m \|Mx\|^2 = m \|x\|^2$$

↑ uso che D è diagonale ↑ perché M è una matrice ortogonale

[Volevamo: $\|Mx\|^2 = (Mx)^t (Mx)$
 $= x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2$]

— o — o —

Dim. del minimo locale Con Taylor

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_0 \cdot R + \frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R + \underbrace{o(\|R\|^2)}_{\eta(R)}$$

Per definizione di o piccolo sappiamo che

$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\eta(R)}{\|R\|^2} = 0$. Detto m il più piccolo autovalore di $Hf(x_0)$ si ha che $\exists \delta > 0$ b.c.

↑
limite su n variabili

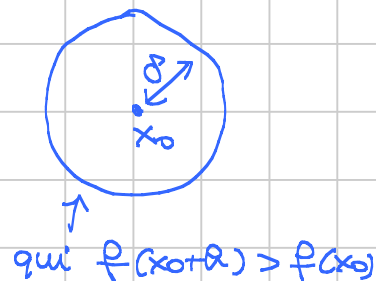
$$\frac{\eta(R)}{\|R\|^2} \geq -\frac{1}{4} m \quad \text{se } \|R\| \leq \delta, \text{ cioè}$$

$$\eta(R) \geq -\frac{1}{4} m \|R\|^2$$

Conclusione come ad Analisi 1:

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) - f(x_0) &= \frac{1}{2} R^t H_f(x_0) R + r(R) \\ &\quad \downarrow \text{uso fatto ①} \\ &\geq \frac{1}{2} m \|R\|^2 - \frac{1}{4} m \|R\|^2 \\ &= \frac{1}{4} m \|R\|^2 > 0 \end{aligned}$$

Conclusione: se $\|R\| \leq \delta$ e $R \neq 0$ si ha
 $f(x_0 + R) > f(x_0)$
quindi x_0 è p.to di min. locale.



Esercizio Rifare la dimostrazione nel caso del max. locale.

Funzioni vettoriali

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

n variabili in
parentesi

m componenti in arrivo

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x, y) = (\underbrace{x^2 - y}_{f_1(x, y)}, \underbrace{e^x y}_{f_2(x, y)}, \underbrace{y}_{f_3(x, y)})$

Morale: dare una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ vuol dire dare
3 funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

Qual è l'equivalente della derivata prima?

È la MATRICE JACOBIANA, ottenuta facendo le derivate parziali
delle varie componenti:

$$Jf = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \\ f_{3x} & f_{3y} \end{pmatrix}$$

Le righe di J sono i gradienti
delle componenti di f

Nell'esempio:

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ e^x y & e^x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CHAIN RULE

Analisi 1: derivata della funzione composta

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e pongo

$$R(x) = f(g(x))$$

allora $R'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Analisi 2: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, e pongo

$$R(x) = f(g(x))$$

$$R: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Allora

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$JR(x) = Jf(g(x)) \cdot Jg(x)$$

↑
prodotto
di matrici

(controllare che le dimensioni delle
matrici in gioco permettano di fare
il prodotto)

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y)$

Curva $(x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$ ad esempio la parametrizzazione
di una linea nel piano

$g(t) = f(x(t), y(t))$. Problema: calcolare $g'(t)$

$$g'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$g''(t) = [f_x(x(t), y(t))]' x'(t) + f_x(x(t), y(t)) x''(t) +$$
$$[f_y(x(t), y(t))]' y'(t) + f_y(x(t), y(t)) y''(t)$$

$$= (f_{xx}(x(t), y(t)) x'(t) + f_{xy}(x(t), y(t)) y'(t)) x'(t) + f_x(\dots) x''(t) +$$
$$(f_{yx}(x(t), y(t)) x'(t) + f_{yy}(x(t), y(t)) y'(t)) y'(t) + f_y(\dots) y''(t).$$

Esercizio Interpretare il conto per $g'(t)$ in termini di CHAIN RULE,
cioè come composizione di $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

— o — o —