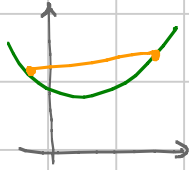


Funzioni di più variabili convesseAnalisi 1

"Comunque prendo 2 p.ti sul grafico, il segmento che li congiunge sta "sopra" il grafico"

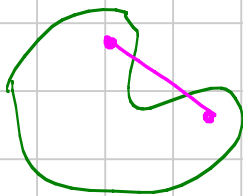
Convessità e derivata 2^a valgono 2 fatti (supposto che esista f'')

(1) f convessa in un intervallo $\Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{intervallo}$

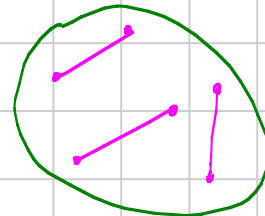
(2) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{intervallo} \Rightarrow f$ convessa.

Analisi 2 La def. è la stessa "comunque prendo 2 p.ti sul grafico, il segmento congiungente sta sopra".

Oss. L'insieme di definizione di $f(x, y)$ deve a sua volta essere un insieme convesso (comunque prendo 2 p.ti, il segmento che li congiunge è contenuto nell'insieme)



non convesso



convesso

Teorema (Convessità e matrice Hessiana)

Supponiamo che la matrice Hessiana esista. Allora

(1) f convessa in un insieme $\Rightarrow Hf \geq 0$ in tutto l'insieme
↑
 semidef. pos.

(2) $Hf > 0$ in tutto l'insieme $\Rightarrow f$ convessa nell'insieme.
↑
 def. pos.

— o — o —

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{1}{2} \log(1+x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1+x^2+y^2-2x \cdot x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1-y^2+x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

↑
per controllo calcolare anche $f_{yx}(x,y)$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} (x,y)$$

$$Hf(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1-x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & 1-y^2+x^2 \end{pmatrix}$$

Domanda: determinare la segnatura di Hf al variare dei parametri x e y . Ora

$\text{Tr } Hf = 2$, quindi almeno un autovalore è +

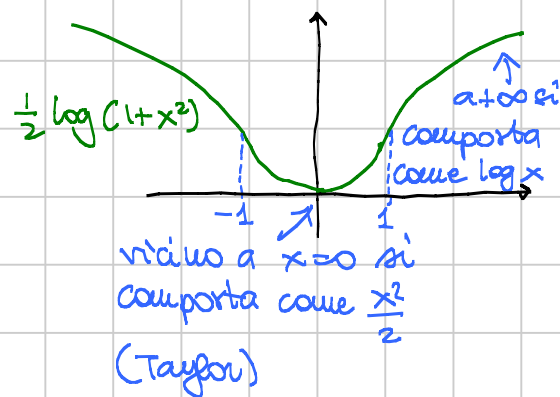
$$\begin{aligned} \det Hf &= (1-x^2+y^2)(1-y^2+x^2) - 4x^2y^2 \\ &= [1+(y^2-x^2)][1-(y^2-x^2)] - 4x^2y^2 \\ &= 1-y^4-x^4+2x^2y^2-4x^2y^2 \\ &= 1-y^4-x^4-2x^2y^2 \\ &= 1-(x^2+y^2)^2 \end{aligned}$$

Quindi il determinante dipende da (x^2+y^2) . Ci sono 3 casi

- se $x^2+y^2 < 1$ si ha $\det > 0$, quindi segnatura ++, quindi f è convessa nel cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.
- se $x^2+y^2 = 1$ si ha $\det = 0$, quindi segnatura +0, quindi GUA!
- se $x^2+y^2 > 1$ si ha $\det < 0$, quindi segnatura +- , quindi f non è né concava (che richiederebbe --) né convessa (che richiederebbe almeno semidef. pos).

Come è fatto il grafico?

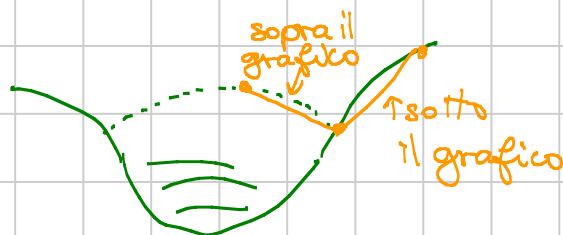
In una variabile $\frac{1}{2} \log(1+x^2)$



In 2 variabili è lo stesso grafico ruotato intorno all'asse z.

Vicino all'origine c'è un "lago" di raggio 1 (zona convessa con minimo loc. e glob. in (0,0)). Poi tutto intorno sale senza essere né concava, né convessa.

Domanda: posso capire che in (0,0) c'è un minimo usando Taylor? Certo!



$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \dots \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1}{2} \log(1 + \underbrace{x^2+y^2}_t) = \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}_t + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

Da qui deduco che l'origine è un p.to stazionario e la forma quadratica associata a $H_f(0,0)$ è x^2+y^2 , quindi def. pos., quindi min. locale.

— o — o —

Esempio 2 $f(x,y) = y^3 + xy$

Domanda: trovare i p.ti stat. e capire cosa sono

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{L'unico p.to stazionario è } (0,0)$$

Essendo "lo sviluppo di Taylor di se stessa" si ha che la forma associata alla matrice Hessiana è $2xy$, quindi segnatura $+-$, quindi l'origine è un mountain pass.

[un'alternativa: calcolo diretto di $H_f(0,0)$]

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ Stessa domanda

$$\begin{aligned} \nabla f = 0 \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} & \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x \\ x + 12x^2 = 0 \end{cases} \\ & x(12x + 1) = 0 \\ & \hookrightarrow x = 0 \quad \text{opp.} \quad x = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Quindi i p.ti stazionari sono $(0,0)$ e $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$

Calcolo Hf : $f_{xx} = 2$ $f_{xy} = 1$ $f_{yy} = 6y$

Quindi $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ Sostituisco i p.ti

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Det} < 0 \Rightarrow$ segnatura $+- \Rightarrow$ p.to di sella

$Hf(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{Det} > 0, \text{Tr} > 0 \Rightarrow$ segnatura $++$
 $\Rightarrow$ p.to di min. locale

Ultima domanda: cosa possiamo dire di $\sup/\inf$ di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$

Non posso dire che esiste il minimo e viene raggiunto in $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$.

L' Hf dice solo che è p.to di min. locale.

Mi servirebbe un W. generalizzato per dire che il min. esiste !!!

In realtà

- $\sup = +\infty$ ($x=0, y$ enorme)
- $\inf = -\infty$ ($x=0, y$ molto negativo).

Hard-Hand Esiste una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che ha solo 2 p.ti stazionari e sono entrambi p.ti di min. assoluto !!!

— 0 — 0 —