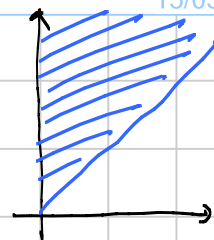


Esercizio 1 Calcolare $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} x^2 - 2y^2$



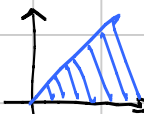
In coordinate polari $x^2 - 2y^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \stackrel{?}{\leq} -c \rho^2$

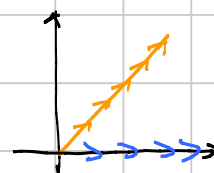
Se fosse vera con un qualche $c > 0$ avrei finito.

Nell'insieme A abbiamo $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e quindi } \cos^2 \theta \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq 1 \text{ e quindi } \sin^2 \theta \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \leq \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $x^2 - 2y^2 \leq -\frac{1}{2} \rho^2$ da cui il limite fa $-\infty$.

Esercizio 2 Stessa funzione, ma $A =$ 

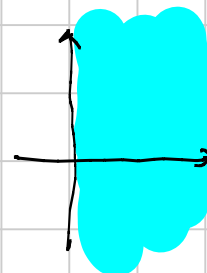


$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^2 - 2y^2) = \text{N.E.}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t^2 = -\infty$$

Esercizio 3 $f(x, y) = x^2 + y^3$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$



$$\sup = +\infty \quad (x = 27, y \text{ enorme})$$

$$\inf = -\infty \quad (x = 27, y \text{ enormemente negativo})$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} x^2 + y^3 = \text{N.E.}$$

Esercizio 4 $f(x, y) = x^2 + y^3$ $A = 4^{\circ} \text{quadrante}$

$$\inf = -\infty \text{ come prima}$$

$$\sup = +\infty \quad (y = -3, x \text{ enorme})$$

Esercizio 5 $f(x,y) = x^2 + y^3$ $A = 1^o$ quadrante

$$\sup = +\infty$$

$$\inf = \min = 0 \text{ con p.to di minimo : } (0,0)$$

Dim: $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in 1^o$ quadrante e vale il segno di uguale se e solo se $x=y=0$.

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} (x^2+y^3) = +\infty.$$

1^o quadrante

Per dimostrarlo basta osservare che $y^3 \geq y^2 - 1$ per ogni $y \geq 0$.

Dato per buona l'osservazione

$$\underbrace{x^2+y^3}_{+\infty} \geq x^2+y^2-1 = \underbrace{y^2-1}_{+\infty}$$

Perché è vero che $y^3 \geq y^2 - 1$ per ogni $y \geq 0$?

Due casi

$$\rightarrow \text{se } y \geq 1, \text{ allora } y^3 \geq y^2 \geq y^2 - 1$$

$$\rightarrow \text{se } y \in [0,1], \text{ allora } y^3 \geq 0 \text{ e } y^2 - 1 \leq 0, \text{ quindi è comunque vero che } \underbrace{y^3}_{+} \geq \underbrace{y^2 - 1}_{-}$$

Esercizio 6 Calcolare $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^6 + y^2 - x^2 y$

Occhio a non cascare in dimostrazioni in cui si fissa θ ...

Anche il pareggiamento degli esponenti (t, t^3) produce un $2t^6 - t^5$, che continua ad andare a $+\infty$. Sospetto che il limite sia $+\infty$.

Lo devo dimostrare. Faccio il cambio di variabili $y = z^3$. Il limite diventa

$$\lim_{x^2+z^2 \rightarrow +\infty} x^6 + z^6 - x^2 z^3 \quad \text{e questo lo faccio in coordinate polari}$$

quando il vettore (x,y) si allontana dall'origine, anche il vettore (x,z) si allontana dall'origine

$$x^6 + z^6 - x^2 z^3 = \rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) - \rho^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

$$\geq c \rho^6 - \rho^5 \rightarrow +\infty$$

↳ è il minimo di $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta$ al variare di θ in $[0, 2\pi]$, e il minimo è positivo perché è il valore in un certo θ_0 e non può essere nullo perché dovrebbe essere $\cos \theta_0 = \sin \theta_0 = 0$

Questo mi dice, tra l'altro che

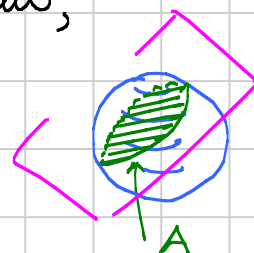
$$\min \{ x^6 + y^2 - x^2 y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \text{ esiste}$$

e lo posso trovare cercando i p.ti stazionari no sistema algebrico.

Esercizio 7 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4}_{\text{dentro la sfera}}, \underbrace{x - y + 2z = 1}_{\text{sul piano}} \}$$

L'insieme A è l'intersezione tra la sfera ed un piano, quindi è un cerchio.



A è compatto $\Rightarrow$ W. dice che max e min esistono.

Possono stare

→ nell' "interno" del cerchio

→ sulla circonferenza che limita il cerchio.

- Per i primi utilizzo i moltiplicatori con $\phi(x, y, z) = x - y + 2z - 1 = 0$. Tra i candidati ottenuti, elimino quelli che non stanno nella sfera

- Per i secondi osservo che la circonferenza è data da

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0}_{\text{sulla sup. sferica}}, \underbrace{x - y + 2z - 1 = 0}_{\text{sul piano}} \}$$

Quindi utilizzo il metodo a 2 moltiplicatori con

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

$$\phi_2(x, y, z) = x - y + 2z - 1$$

Trucco per semplificare i calcoli: SOSTITUZIONE DEL VINCOLO!!

Quando devo fare max/min di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z$ su V posso osservare che su V ho che $x^2 + y^2 = 4 - z^2$.

Quindi mi riduco a studiare max/min di

$$g(x, y, z) = 4 - z^2 - 3z$$

che ora dipende da 2 variabili, quindi conti più semplici.

Sottoesempio $\max \{ \overbrace{x^2 + y^2 + 3z^2}^{f(x, y, z)} : (x, y, z) \in A \}$
 $A = \text{sfera } x^2 + y^2 + z^2 = 5$

Sull'insieme A ho che $f(x, y, z) = 5 + 2z^2$ e questo è

- minimo quando $z = 0$, quindi sull'equatore
- massimo ai 2 poli quando $z = \pm \sqrt{5}$ e il max vale 15.

— o — o —