

MAX e MIN SU INSIEMI NON COMPATTI

Esempio 1 $f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$ $A = \mathbb{R}^2$

Problema generale: trovare inf/sup (che esistono sempre), dire se sono max/min ed eventualmente trovare pti di max/min.

Banale: $\sup \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$ (basta prendere $y=0$ e x enorme)

Osservo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$, quindi per W. generalizzato esiste il minimo.

Giustifico il limite in coordinate polari:

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \sin \theta \cos \theta \geq \boxed{c \rho^4 - \rho^2} \quad \text{in quanto } c > 0$$

$\geq c > 0$
 $\min \{ \cos^4 \theta + \sin^4 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \}$ e questo esiste per W 1-dim.
 ed è positivo in quanto... vedi lezioni prec.

Una volta che il minimo esiste sta o sul bordo (che non c'è) o nei sing. interni (che non ci sono) o negli stazionari interni, che trovo

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x^3 + y = 0 \\ 4y^3 + x = 0 \end{cases} \quad y = -4x^3 \rightarrow \text{sostituisco nella 2ª eq.}$$

$$4(-4x^3)^3 + x = 0 \quad -4^4 x^9 + x = 0$$

da cui $x=0$ oppure $4^4 x^8 = 1$, cioè $x = \frac{\pm 1}{\sqrt[8]{4^4}} = \pm \frac{1}{2}$

$\downarrow$ $y=0$ $\downarrow$ $y = \mp \frac{1}{2}$

Quindi ho trovato 3 p.ti stazionari

$$(0,0)$$
$$\downarrow$$
$$f=0$$

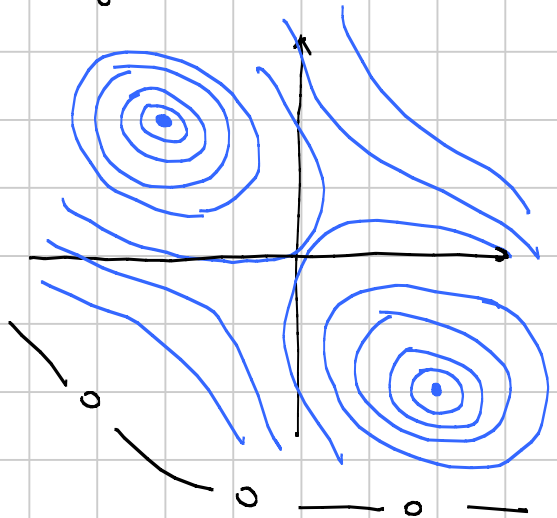
$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\downarrow$$
$$f = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\downarrow$$
$$f = -\frac{1}{8}$$

Conclusione: $\min \{x^4 + y^4 + xy : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = -\frac{1}{8}$

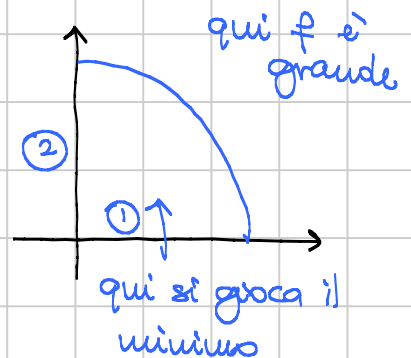
P.ti di min: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Esempio 2 $f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$
 $\uparrow$ primo quadrante
 $\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme, oppure x e y enormi)



L'inf. è un minimo perché ancora una volta esiste il limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.
Occhio! Ora sto calcolando

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty$$



A quel p.to i candidati p.ti di min. sono

→ staz. interni: $\emptyset$ (nessuno dei 3 prec. è interno)

→ sing. interni: $\emptyset$

→ bordo, cioè sui 2 semiasri:

① $\leadsto (t,0), t \geq 0 \leadsto f(t,0) = t^4$ che ha min per $t=0 \leadsto (0,0)$

② $\leadsto (0,t), t \geq 0 \leadsto f(0,t) = t^4$ " " " " " " $\leadsto (0,0)$

Quindi: $\min \{f(x,y) : (x,y) \in A\} = 0$ e p.to di min = $(0,0)$

Alternativa: metodo con la disuguaglianza

$$\rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\rightarrow f(x,y) = x^4 + y^4 + xy \geq 0 \text{ per ogni } (x,y) \in A$$

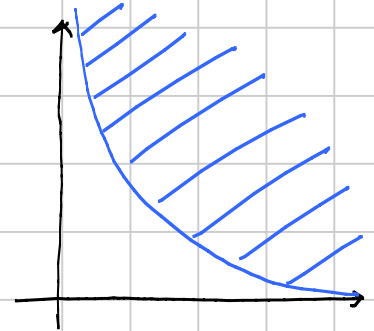
$$\rightarrow f(x,y) > 0 \text{ se } (x,y) \in A \text{ e } (x,y) \neq 0$$

Quindi è l'unico p.to di minimo.

Esempio 3

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{1^{\circ} \text{ quadrante}}, \underbrace{xy \geq 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{sopra} \\ \text{iperbole}}}\}$$



Facile: $\sup = +\infty$ (basta prendere x e y grandi)
(non posso prendere $y=0$ e x enorme)
(posso prendere $y=3$ e x enorme)

Ora

$$\underbrace{f(x,y)}_{\downarrow +\infty} \geq x^2 + y^2 = \underbrace{p^2}_{\downarrow +\infty}$$

da cui $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty$, e quindi per W. generalizzato esiste il minimo.

Può trovarsi $\rightarrow$ stat. interni: $\emptyset$ (l'unico p.to stat. è $(0,0)$ e non è interno)

$\rightarrow$ sing. interni: $\emptyset$

$\rightarrow$ bordo: l'iperbole che posso trattare o con i

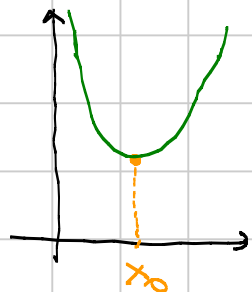
$$\text{moltiplicatori } \Phi(x,y) = xy - 1 = 0$$

$\uparrow$
eq. iperbole

o con la parametrizzazione: $(t, \frac{1}{t}) : t > 0$.

Così mi riduco a studiare la funzione

$$f(t, \frac{1}{t}) = t^2 + \frac{2}{t^2}, \text{ ed è analisi 1}$$

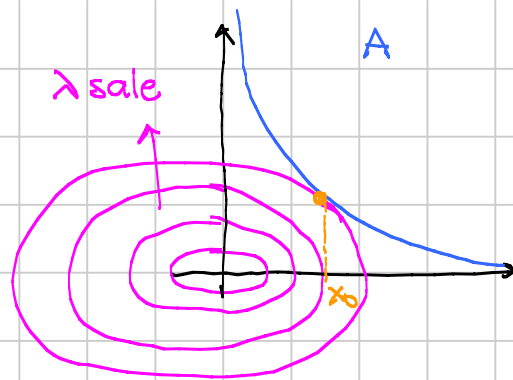


Esercizio: controllare che venga lo stesso con i moltiplicatori

Interpretazione con le linee di livello

$$f(x,y) = \lambda \quad \text{cioè} \quad x^2 + 2y^2 = \lambda$$

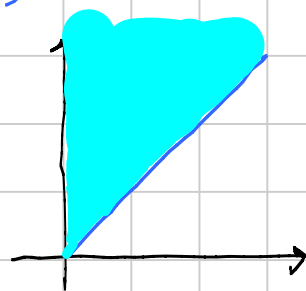
— o — o —



Esempio 4 $f(x,y) = x^2 - 2y^2$
 $A = \text{primo quadrante}$

$$\sup = +\infty \quad (y=0, x \text{ enorme}) \quad \inf = -\infty \quad (x=0, y \text{ enorme})$$

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 - 2y^2$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y\}$



Facile: $\inf = -\infty$ ($x=0$ e y enorme)

Nell'insieme A si ha che $f(x,y) = x^2 - 2y^2 \leq x^2 - 2x^2 = -x^2$
↑
perché $y \geq x$

Quindi $f(x,y) \leq -x^2 \leq 0$ per ogni $(x,y) \in A$

D'altra parte $f(0,0) = 0$.

Quindi

$$\max \{ x^2 - 2y^2 : (x,y) \in A \} = 0$$

e l'unico p.to di max è $(0,0)$. Infatti

- se $x > 0$, allora $f(x,y) \leq -x^2 < 0$
- se $x = 0$, allora $f(x,y) = -2y^2 < 0$ a meno che non sia anche $y = 0$.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2 - 2y^2 = \text{N.E.}$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} x^2 - 2y^2 = -\infty \quad (\text{non banalissimo da verificare...})$$