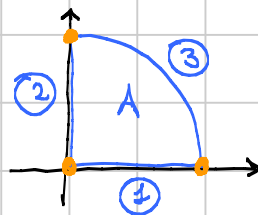


Problemi di max e min con valori assolutiEsempio 1

$$f(x,y) = |y - x^2|$$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{cerchio}}, \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{\text{1° quadrante}} \}$$

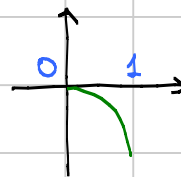


Strategia:

- Studio il pbm. senza valore assoluto $\rightarrow$ max/min di $g(x,y) = y - x^2$
- Poi traggo le conclusioni

Studio g . $\rightarrow$ Strug. interni: $\emptyset$

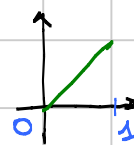
$$\rightarrow \text{Strug. interni} \quad \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

 $\rightarrow$ Bordo

Bordo ①: $(t, 0) : t \in [0, 1]$ $g_1(t) = -t^2$

pti di max/min: $t=0 \rightsquigarrow [0, 0]$

$t=1 \rightsquigarrow [1, 0]$



Bordo ②: $(0, t) : t \in [0, 1]$ $g_2(t) = t$

pti di max/min: $t=0 \rightsquigarrow (0, 0)$

$t=1 \rightsquigarrow (0, 1)$

Bordo ③: volendo con parametrizzazione $(\cos\theta, \sin\theta) : t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

[esercizio]

oppure con i moltiplicatori di Lagrange con $\Phi(x,y) = \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\text{eq. del bordo}}$ 1° sistema

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

... non ha soluzioni

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

1° equazione

$$x(\lambda + 1) = 0$$

$$x = 0$$

3° eq.

$$y = \pm 1$$

$$(0, 1) \quad (0, -1)$$

NO

$$\lambda = -1$$

2° eq.

$$y = -\frac{1}{2}$$

3° eq.

$$x^2 = \frac{3}{4}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

NO

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

NO

Scarto i punti che non stanno nella zona richiesta, resta solo $(0, 1)$
Per inserire d'ufficio i punti di taglio (gli estremi del pezzo ③), che in realtà ci sono già, e ottengo 3 candidati. Ora li confronto:

$$(0, 0) \rightsquigarrow g(0, 0) = 0$$

$$(0, 1) \rightsquigarrow g(0, 1) = 1$$

$$(1, 0) \rightsquigarrow g(1, 0) = -1$$

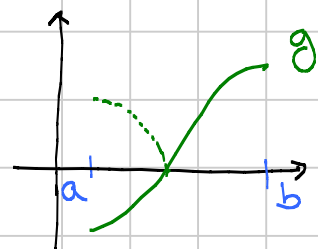
$$\max \{ g(x, y) : (x, y) \in A \} = 1 \quad \text{p.to di max: } (0, 1)$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = -1 \quad \text{p.to di min: } (1, 0)$$

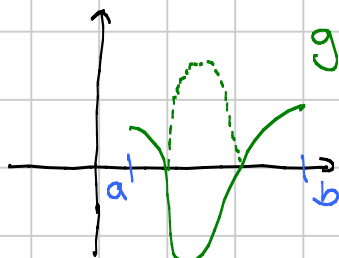
Oss. geometrica: il grafico di $|g(x, y)|$ si ottiene dal grafico di $g(x, y)$ ribaltando le parti negative, cioè quelle nel semispazio di eq. $z < 0$.

Quindi la gara per il max di $|g(x, y)|$ se la giocano il max di $g(x, y)$ ed il minimo di $g(x, y)$ "ribaltato", cioè cambiato di segno.

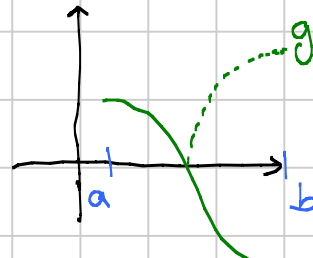
In una variabile la situazione è questa



qui $\max |g| = \max g$



qui $\max |g| = -\min g$



qui $\max |g| = -\min g$

Nell'esempio se la giocano 1 e -1 ribattato, che viene nuovamente 1
Quindi

$$\max \{ |y - x^2| : (x, y) \in A \} = 1, \text{ pti di max: } (0, 1) \text{ e } (1, 0)$$

vecchio pto
di max

vecchio pto
di min.

[se fosse stato $\rightarrow \max g = 1, \min g = -2$, avrei $\max |g| = 2$

$\rightarrow \max g = 3, \min g = -2$, avrei $\max |g| = 3$

$\rightarrow \max g = 3, \min g = 2$, avrei $\max |g| = 3$ e

avrei $g = |g|$ perchè è sempre ≥ 2 , dunque ≥ 0

$\rightarrow \max g = -2, \min g = -5$, avrei $\max |g| = 5$ e

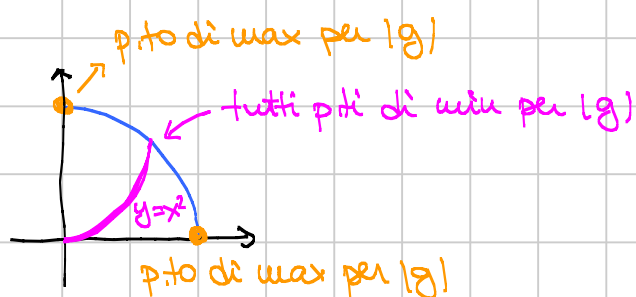
avrei $|g| = -g$ perchè è sempre ≤ -2 , quindi ≤ 0]

Vediamo il minimo: visto che $\max g > 0$ e $\min g < 0$, da qualche parte deve essere $g = 0$, dunque $\min |g| = 0$ e i pti di minimo sono tutti e soli quelli con $g = 0$.

$$\min \{ |y - x^2| : (x, y) \in A \} = 0 \text{ e i pti di minimo sono tutti i}$$

pti $(x, y) \in A$ t.c. $y = x^2$.

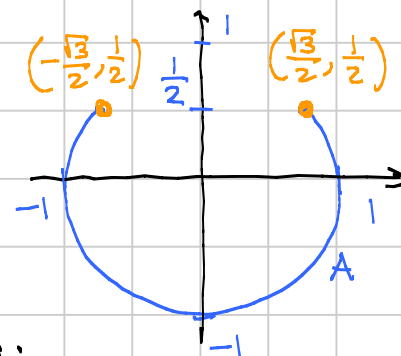
Sono dunque infiniti!



Esempio 2

$$f(x, y) = |y - x^2|$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \leq \frac{1}{2}\}$$



L'insieme A è solo un arco di circonferenza.

In questo esempio c'è solo bordo che tratto

con Lagrange: è il calcolo di prima e ottengo i pti

(0,1)

NO BUONO

(0, -1)

↓

$$g(0, -1) = -1$$

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

↓

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

↓

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

OCCHIO! Devo includere i pti di taglio!!!

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow -\frac{1}{4}$$

Quindi senza valore assoluto:

$$\max \{ y - x^2 : (x, y) \in A \} = -\frac{1}{4} \quad \text{pti di max: } (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = -\frac{5}{4} \quad \text{pti di min: } (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

Con il valore assoluto:

$$\max \{ y - x^2 : (x, y) \in A \} = \frac{5}{4}, \quad \text{pti di max: } (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = \frac{1}{4}, \quad \text{pti di min: } (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

Morale: la funzione $y - x^2$ varia in A tra $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{5}{4}$, quindi è tutta negativa.

Quando la ribalto diventa tutta positiva e varia tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{4}$, con max e min che si scambiano

Oss. Mi sono accorto che il min di $|y - x^2|$ non poteva essere 0 perché A non incontra la parabola $y = x^2$. (Fare linee di livello!).