

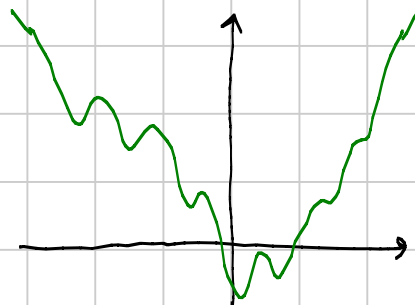
LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

WEIERSTRASS GENERALIZZATO

Analisi 1 (W. gen.) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Allora di sicuro esiste $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

↑
insieme non compatto

— o — o —

Cosa vuol dire andare all'infinito in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ o in $\mathbb{R}^n$?

Risposta: vuol dire allontanarsi sempre di più dall'origine, cioè quello che va all'infinito non è $x \in \mathbb{R}^n$, ma $|x|$, cioè la norma.

Perde di senso ogni distinzione tra $+\infty$ e $-\infty$.

Notazione:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$$

↑
vettore

Essendo un limite, ci sono 4 possibilità:

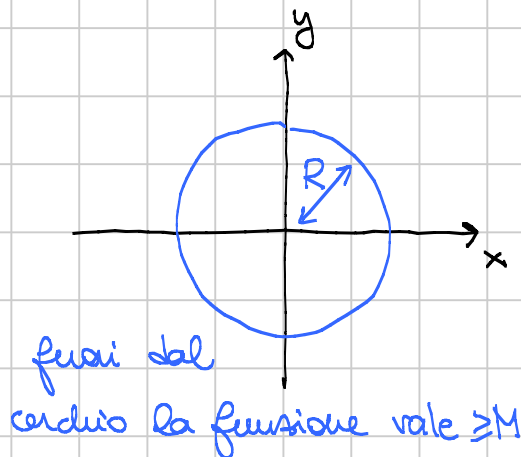
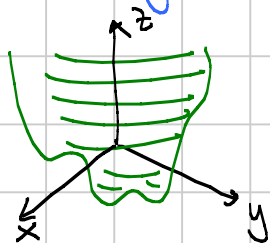
- ① $l \in \mathbb{R}$ ② $+\infty$ ③ $-\infty$ ④ N.E. (nessuno dei precedenti)

Def. di ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists R > 0$ tale che

$$f(x) \geq M \quad \forall x \text{ con } |x| \geq R$$

(più alto M , più il raggio R è probabile che senza grande)



Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists R > 0$ tale che

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } |x| \geq R$$

Def. di ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists R > 0$ tale che

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } |x| \geq R$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— o — o —

Teorema di W. generalizzato Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funs. continua.

Supponiamo che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora necessariamente esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$.

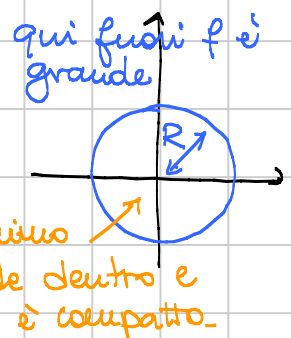
Dim. Fisso $M = f(0) + 1$. Allora $\exists R > 0$ t.c.

$$f(x) \geq M \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ con } |x| \geq R.$$

Per W. classico so che esiste

$$m = \min \{ f(x) : |x| \leq R \}$$

insieme compatto, quindi il minimo esiste
per W. classico



Dico che m è minimo anche su tutto $\mathbb{R}^n$ e non solo su $|x| \leq R$.

Infatti ci sono 2 casi:

- Se $|x| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ per come è stato def. m .

- Se $|x| \geq R$, allora $f(x) \geq M = f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$

per def. di R

perché 0 sta nel
cerchio $|x| \leq R$ quindi
ha concorso nella def.
di m .

Quindi $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e c'è almeno un p.to

x_0 con $|x_0| \leq R$ in cui $f(x_0) = m$.

Quindi m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$.

— o — o —

Analogo: se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,
allora di sicuro esiste

$$\max \{f(x); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Oss. Ho scelto $M = f(0) + 1$ per essere sicuro che esistano valori di
 $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x) \leq M$. Un valore possibile è ora $x = 0$.
— 0 — 0 —

Come calcolo il lim di $f(x)$ per $|x| \rightarrow +\infty$?

Un metodo comodo è l'uso delle coordinate polari. In questo modo
la condizione $|x| \rightarrow +\infty$ diventa $\rho \rightarrow +\infty$.

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^2 - 217x$

Brutalmente: ρ^2 contro ρ , quindi vince ρ^2

Formalmente: in coordinate polari diventa

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} (\rho^2 - 217\rho \cos\theta)$$

SLOGAN: LIBERARSI DI θ !!!

$$\underbrace{\rho^2 - 217\rho \cos\theta}_{\substack{\uparrow \\ +\infty \\ \text{per confronto}}} \geq \underbrace{\rho^2 - 217\rho}_{\substack{\downarrow \text{Analisi 1} \\ +\infty}} \leftarrow \text{senza } \theta$$

Di conseguenza questa
espressione è $\geq M$
appena sono fuori dal
cerchio di raggio ρ_0

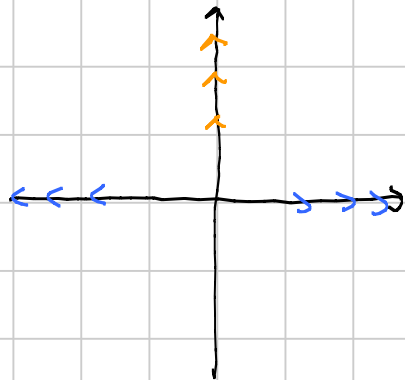
Fissata una qualunque quota M
esiste ρ_0 t.c. $\rho^2 - 217\rho \geq M$
per ogni $\rho \geq \rho_0$ (def. di lim. di
Analisi 1)

Esempio 2

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty}$$

$$x^2 - y^2 + 217x$$

Questo limite non esiste. Trovo due modi di andare all'infinito in $\mathbb{R}^2$ che producono limiti diversi.



Se vado lungo l'asse x vuol dire che
pongo $y = 0$ e faccio andare $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 217x = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} -y^2 = -\infty$$

Due direzioni con limiti diversi $\Rightarrow$ lim. globale N.E.

$$\begin{aligned} \sup \{ x^2 - y^2 + 217x : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} &= +\infty \\ \inf \{ \quad \quad \quad \} &= -\infty \end{aligned}$$