

Esempio  $f(x, y, z) = x^2 - 2y + 3xz$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 7\}$$

Stor. interni:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ -2 = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \end{matrix} \quad \emptyset$$

Sing. interni:  $\emptyset$

Bordo: Luogo di zeri di  $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 7$

1° sistema:

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi_z = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \text{---} \quad \text{Nessuna soluzione}$$

2° sistema:

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ f_z = \lambda \Phi_z \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3z = 2\lambda x \\ -2 = 4\lambda y \\ 3x = 6\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 7 \end{cases}$$

Si risolve in funzione di  $\lambda$  (è un sistema lineare) e poi si sostituisce nella 4ª equazione.

$$y = -\frac{1}{2\lambda}, \quad x = 2\lambda z, \quad \underbrace{4\lambda z + 3z}_{=0} = \underbrace{4\lambda^2 z}_{=0} \leadsto \text{ricavo } z \leadsto \text{ricavo } x$$

Caso con più moltiplicatori Si pone in  $\mathbb{R}^3$  (o in dimensione superiore) quando il bordo è intersezione di due (o più) luoghi di zeri)

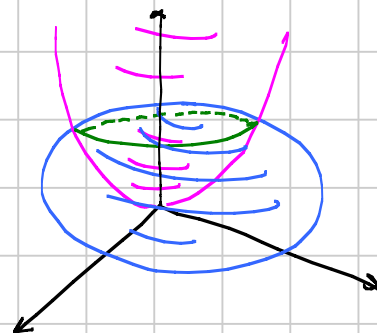
Esempio  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 5 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}\}$

Intersezione tra un ellissoide ed un paraboloide (viene una curva)

L'insieme è descritto da 2 equazioni:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0 \quad x^2 + y^2 + 2z^2 - 5 = 0$$

$$\Phi_2(x, y, z) = 0 \quad z - x^2 - 3y^2 = 0$$



Voglio fare max/min di  $f$  su  $V$ .

Come trovo i candidati?

1° sistema Cerco i p.ti di  $V$  in cui  $\nabla\Phi_1$  e  $\nabla\Phi_2$  sono LIN. DIPENDENTI

2° sistema Cerco i p.ti di  $V$  in cui  $\nabla f$  è combinazione lineare di  $\nabla\Phi_1$  e  $\nabla\Phi_2$ , cioè

$$\nabla f = \lambda \nabla\Phi_1 + \mu \nabla\Phi_2 \quad \text{cioè}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \Phi_{1x} + \mu \Phi_{2x} \\ f_y = \lambda \Phi_{1y} + \mu \Phi_{2y} \\ f_z = \lambda \Phi_{1z} + \mu \Phi_{2z} \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla\Phi_1 + \mu \nabla\Phi_2 \\ \text{stare in} \\ V \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \text{ equazioni in } 5 \\ \text{incognite, poi dimentico} \\ \lambda \text{ e } \mu \text{ e considero solo} \\ (x, y, z) \end{array}$$

il 1° sistema diventa invece

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi_{1x} & \Phi_{1y} & \Phi_{1z} \\ \Phi_{2x} & \Phi_{2y} & \Phi_{2z} \end{pmatrix} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3 \text{ determinanti} = 0 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 5 \text{ equazioni in} \\ 3 \text{ incognite: di} \\ \text{solito non ha} \\ \text{soluzione.} \end{array} \right\}$$

Esempio Max e min di  $f(x, y, z) = x - 3z$  sull'insieme  $V$  descritto sopra (occhio:  $V$  è "solo bordo")

1° sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rango} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z \\ -2x & -6y & 1 \\ -8xy & & \end{pmatrix} = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 5 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xy = 0 \\ 2y + 24yz = 0 \\ 2x + 8xz = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} xy = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y(1 + 12z) = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{12} \\ \quad \quad \quad \rightarrow y = 0 \rightarrow x(1 + 4z) = 0 \end{array}$$

... con un po' di pazienza si vede (spero) che non ci sono soluzioni.

2° sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \phi_{1x} + \mu \phi_{2x} \\ f_y = \lambda \phi_{1y} + \mu \phi_{2y} \\ f_z = \lambda \phi_{1z} + \mu \phi_{2z} \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda x - 2\mu x \\ 0 = 2\lambda y - 6\mu y \\ -3 = 4\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 5 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{array} \right.$$

2° equazione

$$y(\lambda - 3\mu) = 0$$

$$y = 0 \quad \downarrow \text{1ª eq.}$$

$$x = \frac{1}{2(\lambda - \mu)}$$

$$\downarrow \text{3ª eq.}$$

$$z = \frac{-3 - \mu}{4\lambda}$$

sostituisco nella 4ª e 5ª equazione

— 0 — 0 —

$$\lambda = 3\mu \quad \downarrow \text{1ª eq.}$$

$$x = \frac{1}{4\mu}$$

$$\downarrow \text{3ª eq.}$$

$$z = \frac{-3 - \mu}{12\mu}$$

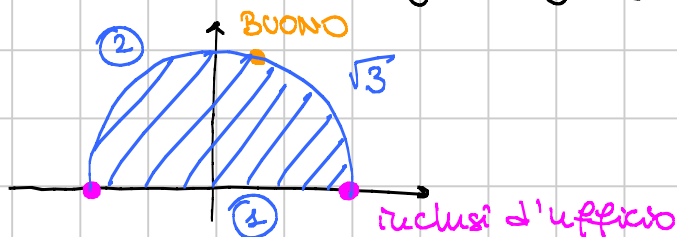
sostituisco e faccio i conti.

Utilizzo moltiplicatori / parametrizzazione

Esempio

$$f(x, y) = x + y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}$$



## Storiciari e singoli interni: $\emptyset$

Bordo: utilizzo i moltiplicatori con  $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 3$  MA

- ① escludo gli eventuali candidati con  $y < 0$
  - ② includo d'ufficio i 2 estremi del tratto di circonferenza considerato, cioè nel nostro caso  $(\pm\sqrt{3}, 0)$
- Questi sono i "BORDI DEI BORDI" oppure  
"PUNTI DI TAGLIO"

Operativamente: perzo ① con parametrizzazione  $(t, 0)$  con  $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$   
 $g(t) = f(t, 0) = x$  e qui è facile...

Perzo ② con "moltiplicatori MA": 1° sistema senza soluzioni...

2° sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} y(\lambda - 1) = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ y = 0 \quad \lambda = 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x = \pm\sqrt{3} \quad x = \frac{1}{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{già trovati} \quad y^2 = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \quad y = \pm\frac{\sqrt{11}}{2} \\ \downarrow \\ \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)} \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right) \\ \text{OK} \quad \text{NO BUONO} \end{array}$$

Confronto: 3 valori e ho finito.

Esercizio: fare lo stesso esercizio con parametrizz. pura  
e interpretarlo per sicurezza con le linee di livello.

— o — o —