

ANALISI 2 — LEZIONE 10

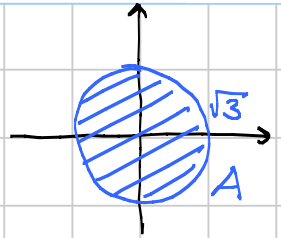
Titolo nota

13/03/2014

Esempio 1

$$f(x,y) = x - 2y$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$$



Staz. interni

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases} \quad \text{impossibile : } \emptyset$$

Sing. interni : $\emptyset$

Bordo : è il luogo di zeri della funzione $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 3$

1° sistema:

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = 0 \end{matrix} \rightarrow \text{incompatibili con la 3ª equazione}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \end{matrix} \quad (\text{per } \lambda = 0 \text{ non ci sono soluzioni})$$

Sostituisco x e y nella 3ª eq; $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 3 \quad \frac{5}{4\lambda^2} = 3$

$$\lambda^2 = \frac{5}{12} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \quad \text{da cui}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \quad \text{1° candidato}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \rightsquigarrow \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \quad \text{2° candidato}$$

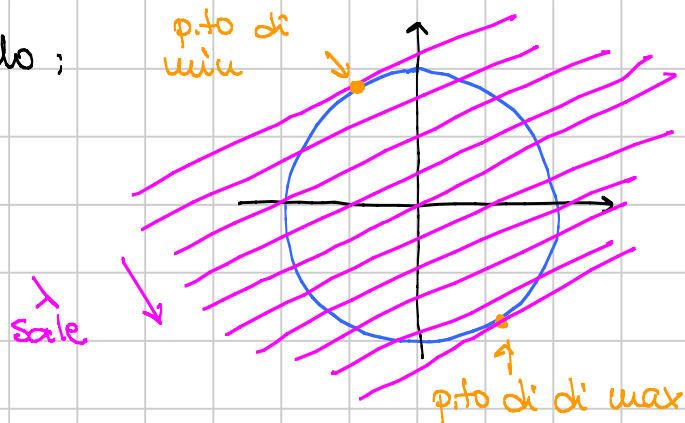
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} \quad \leftarrow \text{MAX}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) = \dots = -\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{min}$$

Interpretazione con le linee di livello;

$$x - 2y = \lambda, \quad x - \lambda = 2y,$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\lambda}{2}$$



Esercizio: stesso problema parametrizzando il bordo

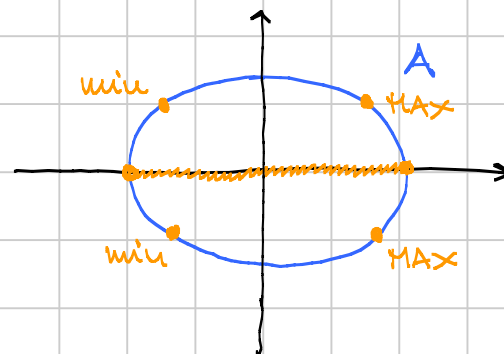
Oss. Metodo alternativo per risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1^a \text{ equazione} / 2^a \text{ equazione:} \\ -\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \end{array} \quad \begin{array}{l} (MA POSSO?) \\ y = -2x \leadsto \text{vado nella } 3^a \text{ eq!} \end{array}$$

$$x^2 + 4x^2 = 3 \quad 5x^2 = 3 \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Esempio 2 $f(x, y) = xy^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

Staz. interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \\ 2xy = 0 \rightarrow \text{GRATIS} \end{cases}$



Tutti i p.ti con $y=0$ sono stazionari interni

Sing. interni: $\emptyset$

Bordo: è il luogo di zeri di $x^2 + 3y^2 - 5 = \phi(x, y)$

1° sistema $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 6y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 = 5 \end{cases}$$

← Non pensare nemmeno di semplificare y

2° equazione:

$$xy = 3\lambda y$$

$$y(x - 3\lambda) = 0$$

$$x = 3\lambda$$

$$y = 0$$

1° eq.

$$y^2 = 6\lambda^2$$

3° eq.

$$9\lambda^2 + 18\lambda^2 = 5$$

$$27\lambda^2 = 5$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{27}$$

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

3° eq.

$$x^2 = 5, x = \pm\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \rightsquigarrow x = 3\lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$y^2 = 6\lambda^2 = \frac{30}{27} = \frac{10}{9} \quad y = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Ho 2 p.ti

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$\text{Per } \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \rightsquigarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

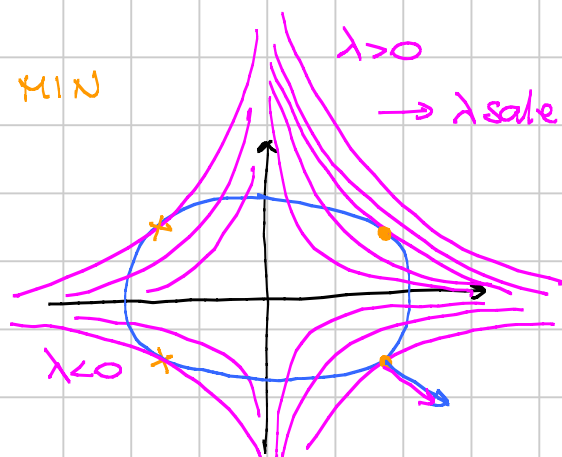
Alla fine ho ottenuto 4 p.ti $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ ← 4 possibilità sui segni.

Non mi resta che sostituire gli infiniti p.ti con $y=0$ e ottengo 0 e i 4 p.ti precedenti

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \frac{10}{9} = \frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \leftarrow \text{MAX}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \dots = -\frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \leftarrow \text{MIN}$$

Le linee di livello sarebbero $xy^2 = \lambda$, cioè $x = \frac{\lambda}{y^2}$



Oss. geometrica Sia V il bordo, che è luogo di zeri di $\phi(x,y)$

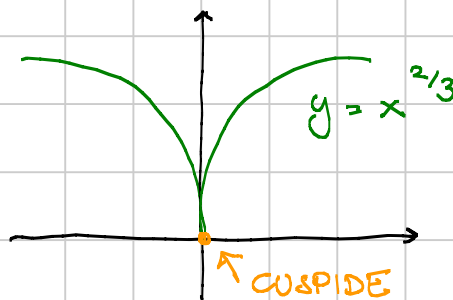
- ① Nei pti di max/min sul bordo le linee di livello di f e di ϕ sono tangenti
- ② ∇f è $\perp$ alla linea di livello di f
 $\nabla \phi$ " " " " " " " ϕ
- ③ Quindi ∇f deve essere multiplo (cioè parallelo) di $\nabla \phi$.

Geometricamente, risolvere il secondo sistema equivale a cercare i pti di V in cui le linee di livello di f sono tangenti all'insieme V stesso

Esempio (in cui il 1° sistema ha soluzione)

$$\textcircled{1} \quad \phi(x,y) = x^2 - y^3 \quad \begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \quad (0,0) \text{ è soluz.}$$

Come è fatto il luogo di zeri $\phi(x,y) = 0$? $y^3 = x^2, y = x^{2/3}$



$$\textcircled{2} \quad \phi(x,y) = xy$$

$(0,0)$ è soluzione del 1° sistema

$$\phi(x,y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$$

Sono i 2 assi

