

Max-min in più variabili su insiemi compatti

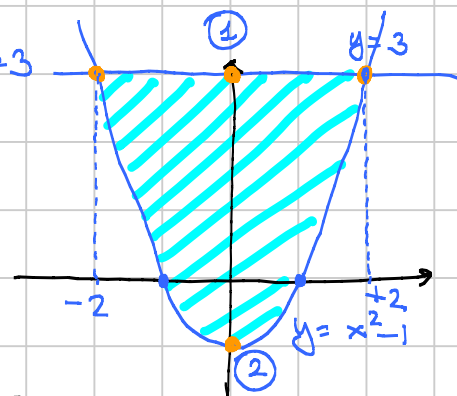
Brutali: → occhio
→ linee di livello

Formali: → ricerca dei p.ti staz. interni ($\nabla f = 0$)
→ " " " sing. interni (∇f N.E.)
→ bordo dell'insieme:
① Parametrizzazione
② Moltiplicatori di Lagrange
③ Tattiche miste

Esempio max e min di $f(x,y) = 3x^2 - y + 3$ sull'insieme
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$

sopra la parabola

sotto la retta $y=3$



$\Rightarrow$ max e min esistono

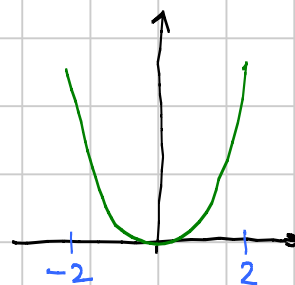
Staz. interni: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$ Non ce ne sono

Sing. interni: non ce ne sono

Bordo: per il ①: segmento $(t, 3) : t \in [-2, 2]$.
lo sostituisco nella funzione e ottengo

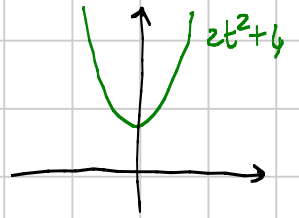
$g_{\pm}(t) = f(t, 3) = 3t^2$ che studio per $t \in [-2, 2]$

Max per $t = \pm 2 \rightsquigarrow$ produce $(-2, 3)$ e $(2, 3)$
min per $t = 0 \rightsquigarrow$ produce $(0, 3)$



Passo ② $(t, t^2 - 1)$: $t \in [-2, 2]$ parametrizzazione della parabola
Sostituendo in $f(x, y)$ ottengo

$$g_2(t) = 3t^2 - t^2 + 1 + 3 = 2t^2 + 4 \text{ che studio in } [-2, 2]$$



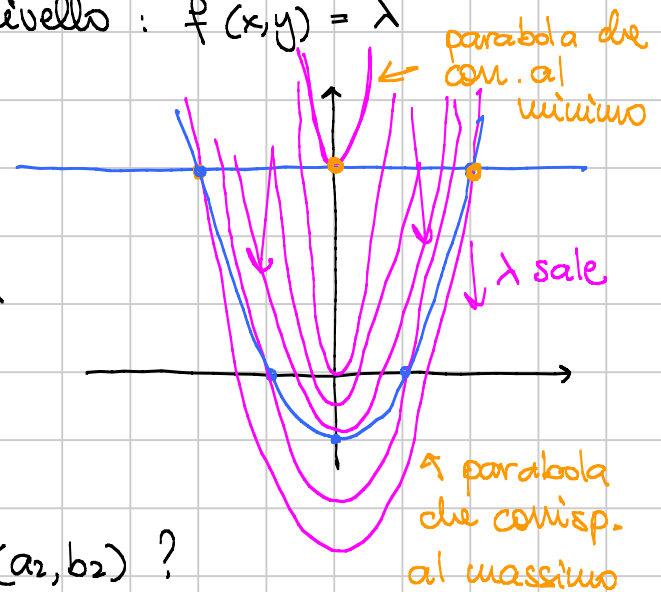
Max per $t = \pm 2 \leadsto$ produce $(-2, 3)$ e $(2, 3)$
min per $t = 0 \leadsto$ produce $(0, -1)$

Sostituisco i 4 candidati nella funzione e ottengo:

$$\begin{aligned} f(-2, 3) &= 12 & \text{Conclusione: } \max &= 12, \text{ p.ti di max: } (-2, 3) \text{ e } (2, 3) \\ f(2, 3) &= 12 & \min &= 0, \text{ p.to di min: } (0, 3) \\ f(0, 3) &= 0 \\ f(0, -1) &= 4 \end{aligned}$$

Verifico per sicurezza con le linee di livello : $f(x, y) = \lambda$
 $3x^2 - y + 3 = \lambda \leadsto y = 3x^2 + 3 - \lambda$

Le linee di livello sono parabole più strette di quella che definisce l'insieme A



COME PARAMETRIZZO ...

① ... il segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2) ?

$$(a_1, b_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \quad t \in [0, 1]$$

② ... il tratto del grafico di $y = \varphi(x)$ con $x \in [a, b]$?

$$(t, \varphi(t)) : t \in [a, b]$$

③ ... la circonferenza con centro in $(0, 0)$ e raggio r ?

$$(r \cos \theta, r \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi]$$

④ ... la circonferenza con centro in (x_0, y_0) e raggio r ?

$$(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi]$$

⑤ ... l'ellisse di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ ($a > 0, b > 0$)?

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \right) : \theta \in [0, 2\pi]$$

— o — o —

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Sia $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora l'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, y) = 0\}$$

è detto luogo di zeri della funzione Φ .

(È la linea di livello di $\Phi(x, y)$ con $\lambda = 0$)

Il metodo dei moltip. di Lagrange serve per trovare candidati p.ti di max/min quando il bordo dell'insieme è il luogo di zeri di una funzione

Esempi 1. Se l'insieme è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$, allora il bordo è la circonferenza $x^2 + y^2 = 3$, cioè

$$x^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$\Phi(x, y) = 0$$

2. Se il bordo è l'insieme $2x^2 + 3y^2 = 5$ (ellisse), lo posso scrivere come luogo di zeri ponendo

$$2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$$

$$\Phi(x, y) = 0$$

Metodo: mettiamo di essere in $\mathbb{R}^2$.

Stia V il luogo di zeri di $\phi(x,y)$.

Allora i candidati ad essere p.ti di max/min di f in V si trovano in queste due categorie.

① P.ti in cui $\phi(x,y) = 0$ e $\nabla \phi(x,y) = 0$
 $\uparrow$ $\uparrow$
Numero Vettore

Questi sono le soluzioni del 1° sistema

$$\phi_x(x,y) = 0$$

$$\phi_y(x,y) = 0$$

$$\phi(x,y) = 0$$

Tre equazioni, due incognite! spesso questo non ha soluzioni

② P.ti in cui $\phi(x,y) = 0$ (cioè che stanno in V) in cui $\nabla f = \lambda \nabla \phi$
(cioè il gradiente di f è multiplo del gradiente di ϕ)

Questi punti sono le soluzioni del 2° sistema

$$f_x(x,y) = \lambda \phi_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lambda \phi_y(x,y)$$

$$\phi(x,y) = 0$$

Tre equazioni e 3 incognite: x, y, λ .

Di solito questo ha soluzioni e delle soluzioni posso dimenticare il λ e considerare solo le parti (x,y) che producono i candidati richiesti.

Oss. λ è il MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE.