

Come determino max/min di f su un insieme compatto A ?

- ① A occhio (solo casi molto semplici)
- ② Metodo delle linee di livello (solo casi semplici)
- ③ Metodo classico: p.ti stat. int., sing. int., bordo
Ma come gestisco il bordo?

③.1 Parametrizzazione

③.2 Moltiplicatori di LAGRANGE.

Esempio 1 $f(x,y,z) = x^2 - y^4 + 2z$ $A = [-1,1] \times [-2,1] \times [0,1]$

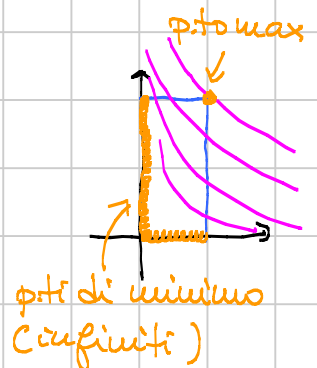
W funziona

- p.ti di max: $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$; $\max = 3$
- p.ti di min: $(0,-2,0)$; $\min = -16$.

Esempio 2 $f(x,y) = xy$ $A = [0,1] \times [0,2]$

W come sempre

- p.ti di max: $(1,2)$; $\max = 2$;
- p.ti di min: dati L ; $\min = 0$.

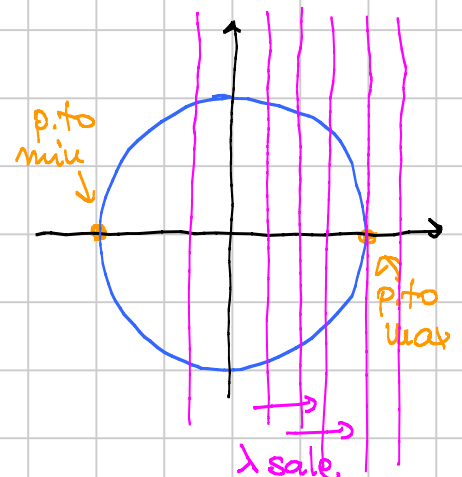


Esempio 3 $f(x,y) = x$ $A = \text{cerchio con centro in } (0,0) \text{ e raggio } 2$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

- p.to di max: $(2,0)$,
 $\max = 2$
- p.to di min: $(-2,0)$,
 $\min = -2$

Le linee di livello di $f(x,y)$ sono

$f(x,y) = \lambda$, cioè $x = \lambda$, cioè rette // all'asse y

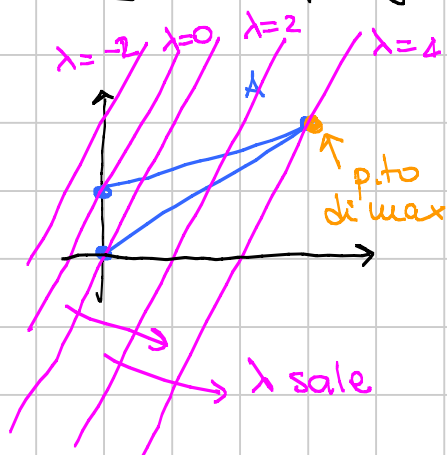


Max di $f(x,y)$ in A è il più grande λ per cui A interseca la linea di livello $f(x,y) = \lambda$

Il min ... è il più piccolo λ ...

Metodo delle linee di livello : cercare + grande e + piccolo λ per cui l'insieme dato A tocca la linea di livello

Esempio 4 $f(x,y) = 2x - y$ $A =$ triangolo con vertici in $(0,0), (0,1), (3,2)$



W come sempre.

A occhio NON si fa : dovei prendere, per il max, x grande e y piccolo, ma se prendo x grande sono costretto a prendere y grande

Vedo le linee di livello: $f(x,y) = \lambda$, cioè $2x - y = \lambda$, cioè $y = 2x - \lambda$

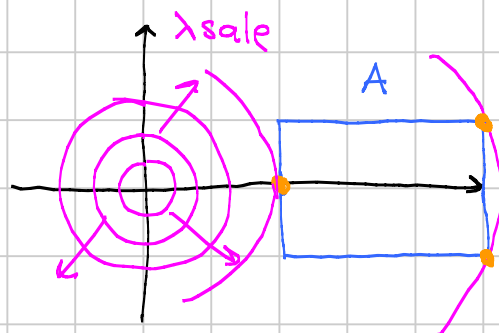
Punto di max: $(3,2)$, max = 4

Punto di min: $(0,1)$, min = -1.

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 + y^2$ $A = [2,5] \times [-1,1]$

W come sempre.

Le linee di livello sono circ. con centro nell'origine.



P.to di min: $(2,0)$, min = 4

P.ti di max: $(5,1)$ e $(5,-1)$, max = 26.

Esempio 6 Stessa cosa esempio 5 con metodo classico.

• Stazionari interni : risolvo $\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$(x,y) = (0,0)$$

lo scarto perché non è interno

• Singolari interni : $\emptyset$

• bordo $\rightarrow$ metodo della parametrizzazione

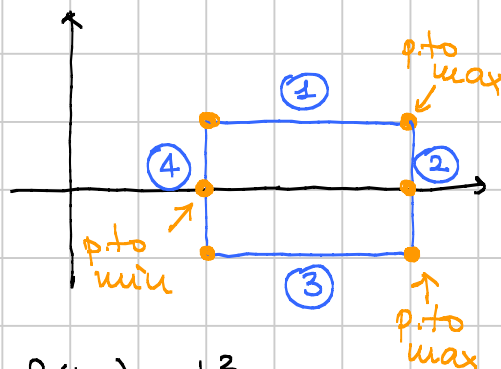
Scrivo parametrizzazioni dei 4 pezzi del bordo

$$\rightarrow \text{Pezzo ①} = \{(t, 1) : t \in [2, 5]\} \quad g_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$$

$$\rightarrow \text{Pezzo ②} = \{(5, t) : t \in [-1, 1]\} \quad g_2(t) = f(5, t) = t^2 + 25$$

$$\rightarrow \text{Pezzo ③} = \{(t, -1) : t \in [2, 5]\} \quad g_3(t) = f(t, -1) = t^2 + 1$$

$$\rightarrow \text{Pezzo ④} = \{(2, t) : t \in [-1, 1]\} \quad g_4(t) = f(2, t) = t^2 + 4$$



Studio le 4 funzioni e ho max/min su ogni tratto.

Poi prendo il più grande ed il più piccolo.

Pezzo ① : min per $t = 2$ e max per $t = 5 \rightarrow$ questi producono in A i punti $(2, 1)$ e $(5, 1)$

Pezzo ② : min per $t = 0$ e max per $t = \pm 1 \rightarrow$ producono $(5, 0)$ e $(5, \pm 1)$

Pezzo ③ : min per $t = 2$ e max per $t = 5 \rightarrow (2, -1)$ e $(5, -1)$

Pezzo ④ : min per $t = 0$ e max per $t = \pm 1 \rightarrow (2, 0)$ e $(2, \pm 1)$

Mettendo assieme i vari pezzi ho ottenuto 6 p.ti.

Li sostituisco nella funzione e avrò i p.ti di max/min.

Esempio 7

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

A = circonferenza (solo bordo)

linee di livello : $2x^2 + 3y^2 = \lambda$

sono ellissi più larghe che lunghe

minimo in $(\pm 1, 0) \rightsquigarrow 2$

massimo in $(0, \pm 1) \rightsquigarrow 3$

