

Back to

② Come dim. che $f(x,y)$ è diff. in (x_0, y_0) ?

Due modi:

- 1 - usando la definizione (sconsigliato se possibile)
- 2 - usando il seguente

Teorema (del differenziale totale) Se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile.

Conseguenza: dove non ci sono particolari problemi burocratici le funzioni sono differenziabili.

— 0 — 0 —

MAX e MIN PER FUNZIONI DI 2 O PIÙ VARIABILI

ANALISI 1 Teorema di Weierstrass Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esistono sicuramente

importante che ci siano gli estremi

$\max \{f(x) : x \in [a,b]\}$
 $\min \{f(x) : x \in [a,b]\}$

sono dei valori assunti dalla funzione, cioè "delle y"

Le x corrispondenti sono i punti di max/min e si cercano nelle seguenti 3 categorie:

senza estremi

- ① stazionari interni: p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
- ② singolari interni: p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste
- ③ bordo: p.ti $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

Operativamente:

- si trovano i p.ti di tipo ①, ②, ③
- si sostituiscono tutti in $f(x)$ e si vede dove vale di + o di -.

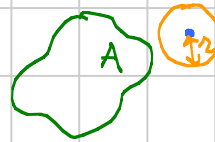
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $R > 0$ tale che

$$A \subseteq B_R(0) \quad (A \text{ è contenuto nella palla con centro nell'origine e raggio } R)$$

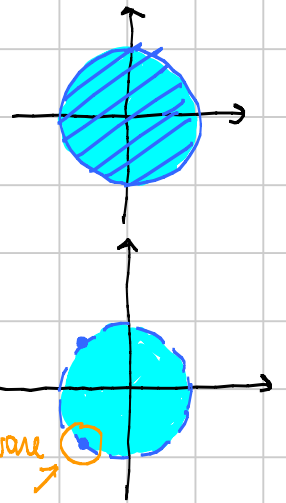
Esempi Un quadrato, ovunque sia, è limitato
Il primo quadrante non è limitato
Una retta non è limitata,

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se
(brutalmente: contiene tutto il suo bordo)
rigorosamente: per ogni $x \notin A \exists r > 0$ t.c. $A \cap B_r(x) = \emptyset$

(Detto altrimenti: per ogni punto x che non sta in A esiste una palla con centro in x e raggio a scelta che non interseca A)



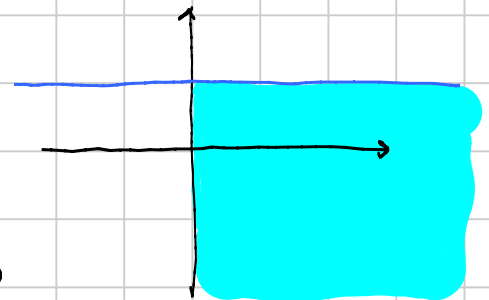
Esempi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} = A$ è chiuso
(cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2, bordo compreso)
 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\} = B$ NON è chiuso



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} = C$ è chiuso

non riesco a trovare un cerchio che non interseca B

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 1\} = D$ è chiuso
e il suo bordo sono due semirette



Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO
e è LIMITATO + CHIUSO.

Teorema (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto
Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua
Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in A \}$$
$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

Achtung! Se non sono verificate le ipotesi, allora max e min potrebbero comunque esistere, ma non sono obbligati a farlo.
In ogni caso, inf e sup esistono sempre.

I p.ti di max / min vanno ricercati nelle seguenti 3 categorie

- ① p.ti stazionari interni: p.ti interni all'insieme (non sul bordo)
in cui $\nabla f = 0$
- ② p.ti singolari interni: p.ti interni all'insieme in cui f non è differenziabile
- ③ bordo: p.ti del bordo dell'insieme, che però ora sono infiniti.

Dim. (che nei p.ti di max / min interni, se esistono le derivate parziali, queste sono nulle)

Sia (x_0, y_0) un p.to di minimo interno.

Se considero la funzione

$$g(t) = f(x_0 + t, y_0) \quad (\text{quella a cui si trova l'ovvio che percorre la retta } (x_0 + t, y_0))$$

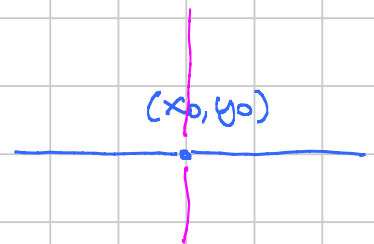
Allora $g(t)$ ha un minimo per $t=0$, quindi

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

Stesso discorso per la funzione $g(t) = f(x_0, y_0 + t)$.

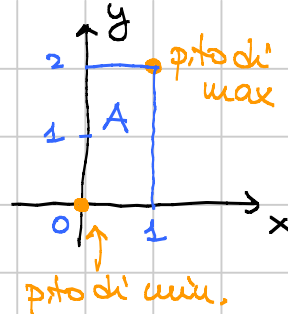
Stesso discorso se invece del min. ho un p.to di max.

— o — o —



Esempio 1 $f(x,y) = 2x + 3y$ $A = [0,1] \times [0,2]$

f è continua, A è compatto
 $\Rightarrow$ max e min esistono



Si vede ad occhio che

- p.to di max = $(1,2)$ e max = 8 (prendo x e y il massimo possibile)
- p.to di min = $(0,0)$ e min = 0 (" " " " minimo ")

Esempio 2 $f(x,y) = 2x - 3y$ $A = [0,1] \times [0,2]$

W come sopra

- p.to di max = $(1,0)$ e max = 2 (x max e y min)
- p.to di min = $(0,2)$ e min = -6 (x min e y max)



Esempio 3 $f(x,y) = x^2 - y$ $A = [-1,2] \times [-2,3]$

W come sopra

- p.to di max = $(2,-2)$ e max = 6
- p.to di min = $(0,3)$ e min = -3

↑
 vede x^2 minimo
 possibile

