

- ① Come calcolo le derivate parziali?
- ② Come dimostro che $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) ?
- ③ Come calcolo le derivate direzionali?
- ④ Come calcolo il vettore α che compare nella def. di differenziabile?

Teorema (lts. precedente)



Tutte le altre implicazioni sono abusive

Risposta a ④ Se so fare ① e ②, allora α è il gradiente $\alpha = \nabla f(x_0, y_0)$
cioè il vettore che ha come componenti le derivate parziali

Risposta a ③ Se so fare ① e ②, allora

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f \cdot u$$

Achtung! Se f non è differenziabile, allora le derivate direzionali possono esistere ma non essere date dalla formula.

Risposta a ① Esattamente come ad analisi 1, derivando solo rispetto alla variabile che interessa.
Le altre variabili le tratto come fossero costanti.

Esempi

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$f_x(x,y) = 2x + 0 = 2x$$

y^3 è una costante

$$f_y(x,y) = 3y^2$$

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

x^2 y^3

$$f_x(x,y) = 2xy^3$$

$y^3 \cdot 2x$

$$f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2$$

$$f(x,y) = \sin(xy^2)$$

$\sin(b^2 x) \rightsquigarrow b^2 \cos(b^2 x)$

$$f_x(x,y) = \cos(xy^2) y^2$$

$$f_y(x,y) = \cos(xy^2) 2xy$$

$\sin(ay^2) \rightsquigarrow \cos(ay^2) \cdot 2ay$

$$f(x,y,z) = x e^{yz^2}$$

$$f_x(x,y,z) = e^{yz^2}$$

$$f_y(x,y,z) = x e^{yz^2} \cdot z^2 = x z^2 e^{yz^2}$$

$$f_z(x,y,z) = x e^{yz^2} \cdot 2yz = 2xyz e^{yz^2}$$

$$f(x,y) = e^{xy} \cos y$$

$$f_x(x,y) = e^{xy} \cdot y \cos y$$

$$f_y(x,y) = x e^{xy} \cos y - e^{xy} \sin y$$

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^4), \quad f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^4}, \quad f_y(x,y) = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = x^y, \quad f_x(x,y) = y x^{y-1}$$

è come se fosse x^{20}

$$f_y(x,y) = x^y \log x$$

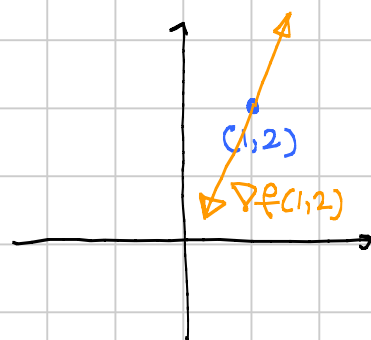
è come se fosse 20^y

Esercizio $f(x,y) = x^2 - xy^3$. Lascio cadere una pallina nel punto corrispondente a $(1,2)$. Dove va la pallina?

Avrà la direzione opposta al gradiente.

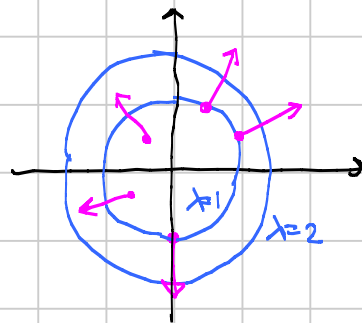
$$\nabla f(x,y) = (2x - y^3, -3xy^2), \quad \nabla f(1,2) = (-6, -12)$$

La pallina va verso NE



Osservazione geometrica Gradiente e linee di livello.

Prendiamo $f(x,y) = x^2 + y^2$. Le linee di livello sono circ. concentriche con centro nell'origine.



$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 2(x,y)$$

Geometricamente il gradiente si rappresenta come "campo di vettori": in ogni punto dell'insieme di partenza disegno un vettore (il gradiente) che mi dice in che direzione andare per salire con la max pendenza.

Il gradiente è sempre perpendicolare alle linee di livello e punta verso i " λ crescenti".

Esercizio $f(x,y) = x^2 - xy$ $v = (1,3)$

Calcolare

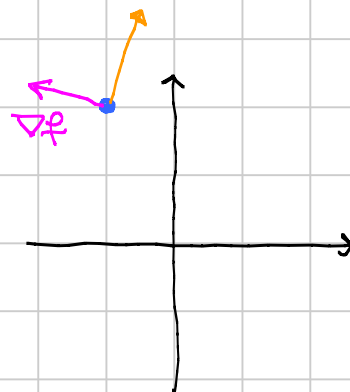
$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2)$$

Soluzione Calcolo $\nabla f(-1,2)$ e faccio il prod. scalare con v

$$\nabla f(x,y) = (2x-y, -x) \quad \nabla f(-1,2) = (-4,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = (-4,1) \cdot (1,3) = -4 + 3 = -1$$

Geometricamente: un punto che si trovi sul grafico nel pto corrispondente a $(-1,2)$ (il punto sul grafico è $(-1,2,3)$) e si muove nella direzione
ho sostituito $(-1,2)$
in $f(x,y)$



$(1,3)$ si trova a scendere.

Se volessi salire al max dovrebbe andare in direzione $(-4,1)$

Esercizio Disegnare il gradiente della funzione
 $f(x,y) = xy$

$$\nabla f(x,y) = (y, x)$$

Nell'origine $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\Rightarrow$ piano tangente orizzontale

(in questo caso è un pto di sella o "mountain pass")

