

ANALISI 2 - LEZIONE 05

Titolo nota

07/03/2014

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha \cdot R + o(|R|) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Teorema Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora valgono i seguenti fatti

- (1) f è continua in x_0
- (2) Esistono le derivate parziali di f in x_0 e sono le componenti del vettore α (che quindi è il gradiente di f in x_0)
- (3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e sono date dalla seguente formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \alpha \cdot v$$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè può accadere che in x_0 esistano tutte le derivate parziali (che vengono tutte $= 0$) e la funzione non è neppure continua in x_0 .

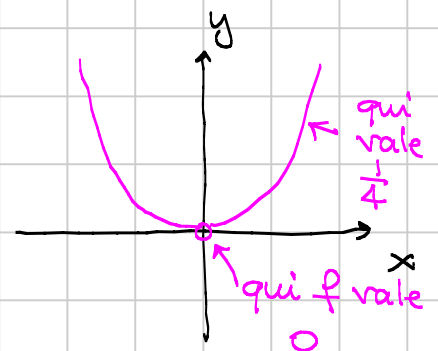
Esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifichiamo che nel p.to $(x_0, y_0) = (0, 0)$ esistono tutte le derivate direzionali, e sono nulle, ma f non è nemmeno continua.

Non è continua: basta universi lungo le parabole, ad esempio (t, t^2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \left(\frac{t^4}{2t^4} \right)^2 = \frac{1}{4} \neq f(0, 0)$$



Calcolo delle derivate direzionali: fisso $v = (\alpha, \beta)$ e calcolo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^2 \alpha^2 t \beta}{t^4 \alpha^4 + t^2 \beta^2} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t \alpha^2 \beta}{t^2 \alpha^4 + \beta^2} \right)^2 = t \left(\frac{\alpha^2 \beta}{t^2 \alpha^4 + \beta^2} \right)^2 = 0$$

quindi per ogni direzione il limite viene 0.
— 0 — 0 —

Dim. formula per le derivate direzionali

Supponiamo che f sia diff: $f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha \cdot R + o(|R|)$ per $R \rightarrow 0$.
Prendo una direzione v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad (\text{uso formula per differenziale con } R = tv)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha \cdot (tv) + o(|tv|) - \cancel{f(x_0)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\alpha \cdot v) + o(t|v|)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \alpha \cdot v + \underbrace{\frac{o(t|v|)}{t|v|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} |v| = \alpha \cdot v$$

— 0 — 0 —

Osservazione Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali corrispondenti a $v = e_k$ (vettori della base canonica)

La dimostrazione di sopra mostra quindi anche l'esistenza delle derivate parziali ed il fatto che

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \alpha \cdot e_k = \alpha_k$$

$\uparrow$ k -esima componente di α .

Una volta che so che f è diff. in x_0 , posso quindi scrivere

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot R + o(|R|) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Inoltre le derivate direzionali sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Oss. Nel definire le derivate direzionali posso limitarmi alle direzioni v con $|v|=1$ (norma!) perché tanto così si descrivono comunque tutte le rette.

Domanda: in quale direzione la derivata direzionale è max/min.

Basta usare l'algebra lineare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \underbrace{|\nabla f(x_0)|}_{\substack{\uparrow \\ \text{non dipende} \\ \text{da } v}} \cdot \underbrace{|v|}_{1} \cdot \cos \theta \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{angolo tra } \nabla f \\ \text{e } v \end{array}$$

- Se voglio derivata direzionale max, prendo $\cos \theta = 1$, cioè $\theta = 0$, cioè mi muovo nella direzione del gradiente
- Se voglio ... min, prendo $\cos \theta = -1$, cioè $\theta = \pi$, cioè mi muovo nella direzione opposta
- quando $\theta = \pm 90^\circ$, la derivata direzionale è nulla.

Significato geometrico del gradiente Il GRADIENTE rappresenta la direzione di massima pendenza della funzione, cioè la direzione in cui muoversi per salire più in fretta possibile.

Analisi 1

$$f(\underbrace{x_0 + R}_x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot R + o(R)$$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0)$$

↑
retta tangente al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$

Analisi 2

$$f(\underbrace{x_0 + R}_x, \underbrace{y_0 + k}_y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot R + f_y(x_0, y_0) \cdot k + o(\dots)$$

$$f(x, y) = \boxed{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)} + o(\dots)$$

↑
piano tangente al grafico di f nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Significato geometrico

