

Calcolo differenziale per funzioni di più variabiliANALISI 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$ Def.1 Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{esiste ed è reale}$$

Def.2 Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema

$$\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0} \iff \boxed{f \text{ è differenziabile in } x_0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f \text{ è continua in } x_0} \quad \boxed{\text{inoltre } \alpha = f'(x_0)}$$

Sia ora $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Def (Derivate parziali) Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Rapporto incrementale sulla sola variabile x .

esiste ed è reale.

Notazione: tale limite, se esiste ed è reale, si dice derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x , e si indica con (a scelta):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

↑
se esiste ed è reale.

Osservazione I limiti nella definizione sono limiti in $\mathbb{R}$, cioè $t \rightarrow 0$ sulla retta reale (limite in una variabile)

Interpretazione geometrica Prendiamo $f_x(x_0, y_0)$.

Consideriamo la retta // asse x passante per (x_0, y_0) .

Ha eq. parametrica $(x_0, y_0) + t(1, 0) = (x_0+t, y_0)$.

Un punto che percorre la retta si trova ad altezza

$$g(t) = f(x_0+t, y_0)$$

Geometricamente, $g(t)$ è l'intersezione tra il grafico di $f(x, y)$ ed il piano $\perp$ al piano xy che contiene la retta (x_0+t, y_0) .

La derivata di $g(t)$ per $t=0$ è proprio $f_x(x_0, y_0)$.

Stessa cosa per la derivata parziale $f_y(x_0, y_0)$

Più in generale. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora la derivata parziale k -esima sarà

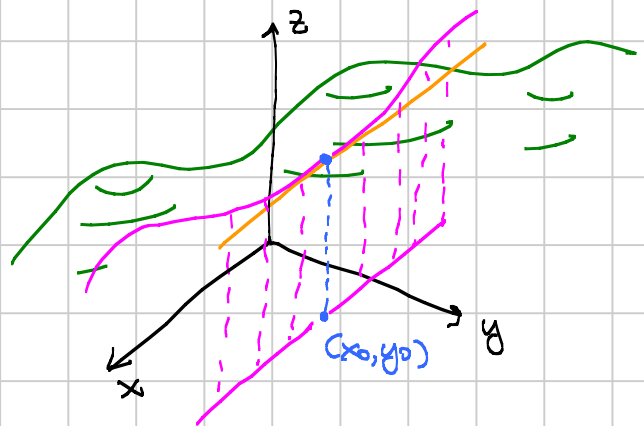
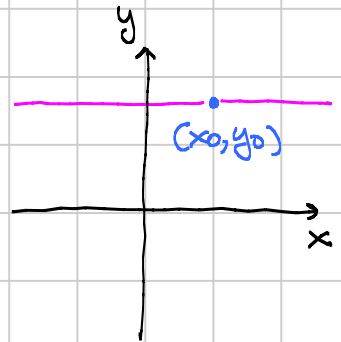
$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\boxed{x_0 + t e_k}) - f(x_0)}{t}$$

↑
 k -esima variabile

↑
aggiunge t solo sulla k -esima variabile.

dove e_k è il k -esimo vettore della base canonica.

Oss. Una funzione di n variabili ha n derivate parziali.



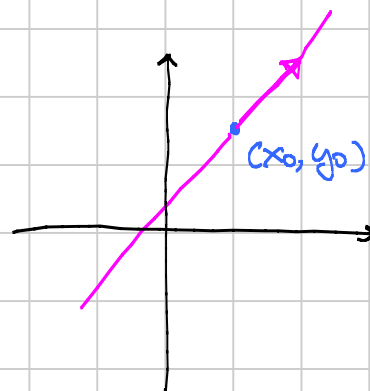
Def. (Derivata direzionale) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
 Sia $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).
 Allora il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se esiste ed è reale, si dice derivata direzionale in (x_0, y_0) rispetto alla direzione v , e si indica

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0).$$

Geometricamente corrisponde a muoversi lungo la retta di eq. parametrica



$$(x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$$

e derivare la funzione di una variabile che si ottiene intersecando il grafico con il piano $\perp$ al piano xy che contiene la retta.

In n variabili, quindi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

↑
se esiste ed è reale.

Oss. Anche le derivate direzionali coinvolgono limiti in una variabile.

Def. Si dice GRADIENTE di $f(x, y)$ in (x_0, y_0) il vettore che ha come componenti le derivate parziali in (x_0, y_0)

NABLA

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

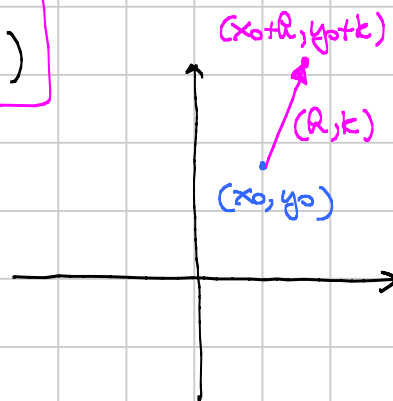
Def. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si dice che $f(x, y)$ è differentiabile nel p.to (x_0, y_0) se esistono due numeri reali α e β tali che

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha R + \beta k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Il vettore (R, k) indica lo spostamento rispetto al punto (x_0, y_0) .

$\sqrt{R^2 + k^2}$ rappresenta la lunghezza dello spostamento



Oss. Quando scrivo $o(\sqrt{R^2 + k^2})$ questo ha sotto il fatto che

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{o(\sqrt{R^2 + k^2})}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0$$

quindi c'è sotto un limite in due variabili.

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è diff. nel p.to $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha \cdot R + o(|R|)$$

↑
vettori di $\mathbb{R}^n$

↑
prodotto scalare
tra vettori di $\mathbb{R}^n$

↑
norma del
vettore

per

$$R \rightarrow 0$$

↑
LIMITE IN
n VARIABILI

Oss. È come se avessi n incrementi indipendenti.

— o — o —