

Calcolo di limiti per funzioni di 2 o più variabili

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ $\left[\frac{0}{0}, \text{forma indeterminata} \right]$

Uso un cambio di variabili: pongo $t = x^2 + y^2$.

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, ho che $t \rightarrow 0$, quindi il limite diventa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \boxed{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}$ $f(x,y)$

1° modo Come alla lezione prec., ma non posso dire che $f(x,y) \geq 0$

Trucco del valore assoluto: se $|f(x,y)| \rightarrow 0$, allora $f(x,y) \rightarrow 0$

(volevo perché $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$)

Quindi mi basta dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = 0$$

Ora $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \boxed{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \leq |y|$
 ≤ 1

Finale con i carabinieri come prima.

2° modo Usare le coordinate polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

Vantaggio: la condizione $(x,y) \rightarrow (0,0)$ diventa $\rho \rightarrow 0$

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{\cancel{\rho^2} \cos^2 \theta \cdot \rho \sin \theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho \cos^2 \theta \cdot \sin \theta$$

Devo fare $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho \cos^2 \theta \cdot \sin \theta$

$$\boxed{-\rho} \leq \boxed{\rho \cos^2 \theta \cdot \sin \theta} \leq \boxed{\rho}$$

↓ ↓ ↓
0 0 0

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

LEGGE FONDAMENTALE: I LIMITI IN PIÙ VARIABILI NON HANNO NESSUNA VOGLIA DI ESISTERE

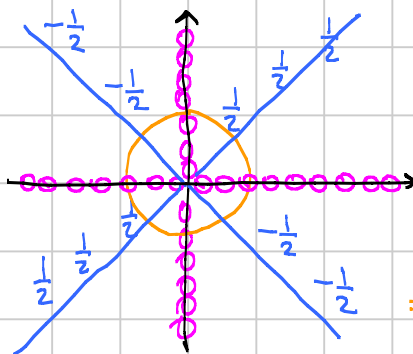
Se il limite esistesse, sarebbe lo stesso su tutte le direzioni di avvicinamento.

Lungo asse x : $f(t, 0) = 0$, quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$

Lungo asse y : $f(0, t) = 0$, quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$

Lungo bisettrice $y = x$: $f(t, t) = \frac{1}{2}$, quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$

Ho trovato 2 direzioni di avvicinamento con limite diverso, quindi il limite non esiste.



In ogni intorno di 0
trovo pti in cui vale
0 e pti in cui vale $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow$ il lim. non può esistere

Come dimostro che un limite non esiste?

Trovo due direzioni di avvicinamento in cui il limite è diverso.

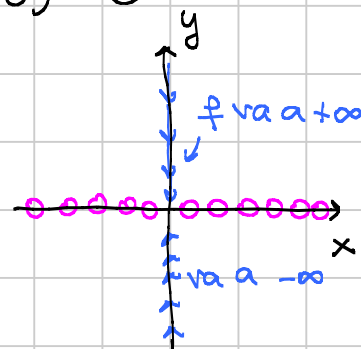
2° modo Coordinate polari $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{\rho^2} \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta \sin\theta$

quindi il limite per $\rho \rightarrow 0^+$ è "cos θ sin θ " quindi dipende da θ

Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$

Lungo asse x ho $f(t,0) = 0$, quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$

(Vedendo: l'asse x, meno l'origine, è la
linea di livello di $f(x,y)$ con $\lambda=0$)



Lungo asse y ho $f(0,t) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$

$$\text{quindi } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0,t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(0,t) = -\infty$$

} bastano questi per
avere che non esiste

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Lungo asse x: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$

Lungo asse y: $\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = 0$

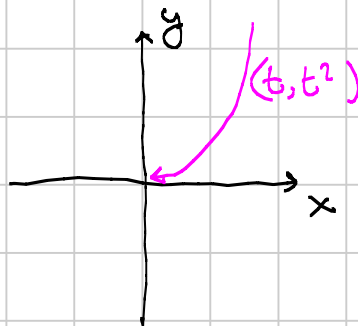
Lungo $y=x$: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^4+t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1+t^2} = 0$

Lungo $y=ux$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,ut) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u t^3}{t^4 + u^2 t^2}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u t}{t^2 + u^2} = 0$ qualunque
sia $u \in \mathbb{R}$

Quindi il limite è 0 lungo tutte le direzioni di avvicinamento

NON BASTA PER DIRE CHE IL LIMITE ESISTE

Se vado a 0 lungo una parabola (t, t^2)
otengo



$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

Osservazione : provare sulla generica parabola (t, mt^2)

Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$

$$0 \leq |f(x,y)| = |x| \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Quindi per i carabinieri + trucco valore assoluto esiste e fa 0.

— 0 — 0 —