

ANALISI 2

- PRECORSO 30% Diseq., Ris. sist. algebrici, insiemi del piano
- ANALISI 1 40% studi di funzioni, Taylor, integrali
- ALGEBRA LINEARE 10% prod. scalare, appl. lin., forme quadratiche
- ANALISI 2 20%

Analisi 2 Funzioni di più variabili

Analisi 1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \subseteq \mathbb{R}$

Analisi 2: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ opp. } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
 $\uparrow$ n variabili in potenza

① Calcolo Differenziale: limiti, continuità, derivabilità, studio di funzioni, max e min (20+)

② Calcolo Integrale: integrali propri ed impropri (20-)

③ Curve, Superfici, Forme Diff., calcolo vettoriale (divergenze, rotori) (20)

Struttura Euclidea su $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale $x \in \mathbb{R}^n$ $x = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{componenti}})$
 $\uparrow$
 vettore

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $x \in \mathbb{R}^3$

Prodotto scalare

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (\text{prod. scalare})$$

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (\text{norma di } x)$$

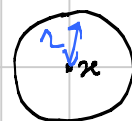
$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

↑
distanza tra x e y

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0$ (raggio) definiamo

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, y) < r\}$$

↑
BALL (palla con centro in x e raggio r)



Analisi 1: $\{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\}$

↑
val. assol.

— 0 — 0 —

Analisi 2: $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$

↑
norma

Funzioni

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 - y + xy$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = xy + z^2 + \cos R(y)$$

$$f(x, y, z) = x + z$$

Analisi 1

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Grafico} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$$

↳ linea nel piano

Analisi 2

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{Grafico} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$

↳ superficie nello spazio

↑
vive nel piano

x, y

↑
quota del p.to della sup. che sta sopra (x, y)

Più in generale: data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\text{Grafico} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, y = f(x)\}$$

↑
vettore di $\mathbb{R}^n$ ← numero

— 0 — 0 —

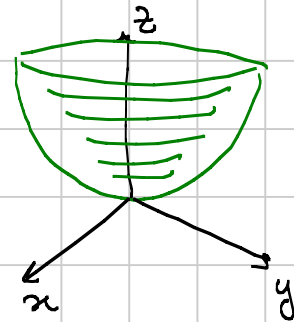
LINEE DI LIVELLO Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (pensato come quota) la linea di livello corrispondente è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\} \leftarrow \text{sottoinsieme dello spazio di partenza}$$

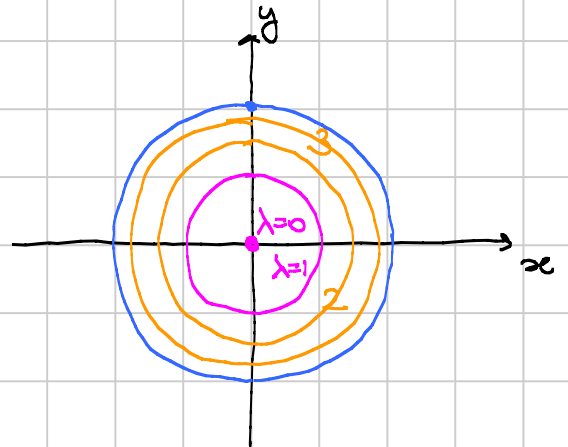
Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

Che sono le linee di livello?



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \lambda\} \rightarrow$ interseco il grafico con il piano $z = \lambda$ (parallelo al piano xy ad altezza λ) e poi proietto il risultato sul piano xy .

- Se $\lambda < 0$, viene $\emptyset$
- Se $\lambda = 0$, viene l'origine $(0, 0)$
- Se $\lambda > 0$, viene la circ. con centro in $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



Esempio 2 $f(x, y) = xy$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}$$

- se $\lambda = 0$, vengono i 2 assi
- se $\lambda > 0$, sono iperboli equilateri
- se $\lambda < 0$, sono iperboli nel 2° e 4° quadr.

