

ANALISI II CIV

ORA 48

Cont. esempio 3: $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$

Questa è soluz. dell'omog.

Si può cercare una soluz. particolare del tipo $u(t) = \lambda t e^{-2t}$

$$u'(t) = \lambda e^{-2t} - 2\lambda t e^{-2t}$$

$$u''(t) = -2\lambda e^{-2t} - 2\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t}$$

$$\underbrace{-4\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t}}_{u''} + \underbrace{+5\lambda e^{-2t} - 10\lambda t e^{-2t}}_{+5u'} + \underbrace{+6\lambda t e^{-2t}}_{+6u} = e^{-2t}$$

Le parti con il t se ne DEVONO ANDARE

Resta $\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow \lambda = 1$

Soluz. generale : $u(t) = te^{-2t} + ae^{-2t} + be^{-3t}$

In generale : se $f(t) = e^{\alpha t}$ il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda e^{\alpha t}$$

questo funziona sempre tranne quando $e^{\alpha t}$ è grā sol. dell' omog.

In tal caso si prova con

$$u(t) = \lambda t e^{\alpha t}$$

Questo ancora non funziona nel caso in cui $te^{\alpha t}$ è sol. dell' omog., ma allora si prova con

$$u(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t} \text{ e così via e prima o poi riesce.}$$

Semi-analogamente se $f(t) = t e^{\alpha t}$ o più in generale

$f(t) = p(t) e^{\alpha t}$, si cerca una soluzione del tipo

$u(t) = q(t) e^{\alpha t}$, dove q è un pol. dello stesso grado di p a coeff. incogniti

Esempio 4 $u'' + 5u' + 6u = t^2 + 3$

Il tentativo da fare è un pol. dello stesso grado

$$u(t) = at^2 + bt + c \quad \leftarrow \text{sempre polinomio completo}$$

$$u'(t) = 2at + b \quad u''(t) = 2a \quad \text{Sostituisco}$$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{10at + 5b}_{+ 5u'} + \underbrace{6at^2 + 6bt + 6c}_{+ 6u} = t^2 + 3$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 10a + 6b = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 3 \end{cases}$$

coeff. t^2
coeff. t
termine noto

$$a = \frac{1}{6}$$

$$6b = -10a = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{5}{18}$$

3^a eq $\leadsto$ ricavo c .

Provare con un polinomio dello stesso grado funziona sempre, TRANNE quando ci sono polinomi tra le soluz. dell'omogenea.

Esempio 5 $u''' + u'' = t^2$

Eq. omogenea : $u''' + u'' = 0$

Polinomio : $x^3 + x^2 = 0$
 $x^2(x+1) = 0$

Radici : $\nearrow x=0 \rightarrow$ mult. 2 $\Rightarrow$ produce 1, t
 $\searrow x=-1 \rightarrow$ mult. 1 $\Rightarrow$ produce e^{-t}

Soluz. gen. eq. omogenea: $u(t) = a + bt + ce^{-t}$

Ora serve una soluz. qualunque della non omogenea.

Verrebbe da provare $u(t) = at^2 + \underline{bt + c}$. Questo fallisce
SOL. OMOG.

Metto una t

$$u(t) = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + \underline{ct}$$

SOL. OMOG.

Metto t^2 :

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$$

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b$$

$$\underbrace{24at + 6b}_{u'''} + \underbrace{12at^2 + 6bt + 2c}_{+ u''} = t^2$$

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 24a + 6b = 0 \\ 6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{si risolve}$$

N.B. Provando con il generico pol. di grado 4

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

si riescono a determinare a, b, c , ma non d ed e .
CI MANCHEREBBE !!! Infatti i coeff. di d ed e sono liberi, che si possono fissare a piacere.

Esempio 6 $u'' + 5u' + 6u = \cos(2t)$

Tentativo: $u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t)$$

Sostituisco :

$$\underbrace{-4\lambda \cos(\cdot) - 4\mu \sin(\cdot)}_{u''} + \underbrace{-10\lambda \sin + 10\mu \cos}_{+5u'} + \underbrace{6\lambda \cos + 6\mu \sin}_{+6u} = \cos$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 10\mu + 6\lambda = 1 & \text{coeff. } \cos(2t) \\ -4\mu - 10\lambda + 6\mu = 0 & \text{coeff. } \sin(2t) \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda + 10\mu = 1 \\ 2\mu - 10\lambda = 0 \end{cases}$$

$$1^a \text{ eq.} - 5 \cdot 2^a \text{ eq} : 2\lambda + 50\lambda = 1 \quad ; \quad 52\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{52}$$

... $\rightarrow$ si trova μ .

In generale: se al II membro c'è $\cos(\alpha t)$ oppure $\sin(\alpha t)$
il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

Non funziona se $\cos(\alpha t)$ e $\sin(\alpha t)$ sono già sol. dell'omog.
In questo caso basta "aggiungere t davanti" finché basta.

Analogo per $f(t) = p(t) \sin(\alpha t)$, $p(t) \cos(\alpha t)$.
polinomio

$$\text{E se } f(t) = 3 + t^2 + \cos(6t) + e^{5t}$$

↗ o si fa un tentativo che contiene i singoli tentativi

↘ o si risolve con un pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni (FUNZIONA PERCHÈ LINEARE).