

# MAT I TLC

ORA 47

Esempio 1  $u'' + 5u' + 6u = 0$

Polinomio:  $x^2 + 5x + 6 = 0$   $(x+2)(x+3) = 0$

Radici:  $\lambda = -2, \lambda = -3$  Base:  $e^{-2t}$   $e^{-3t}$

Soluz. generale

$$u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Esempio 2  $u'' + 4u' + 4u = 0$

Polinomio:  $x^2 + 4x + 4 = 0$   $(x+2)^2 = 0$

Radici:  $\lambda = -2$  di mult. = 2 Base:  $e^{-2t}$ ,  $te^{-2t}$

Soluz. generale:

$$u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$$

Esempio 3  $u'' + 4u' + 13u = 0$

Polinomio:  $x^2 + 4x + 13 = 0$

Radici:  $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$

$= -2 \pm 3i$

Base:  $e^{-2t} \cos(3t), e^{-2t} \sin(3t)$

Soluz. generale:

$u(t) = a e^{-2t} \cos(3t) + b e^{-2t} \sin(3t)$

Esempio 4  $u'' - 4u = 0$  Polinomio:  $x^2 - 4 = 0$

Radici:  $x = \pm 2$  Base:  $e^{2t}, e^{-2t}$

Soluz. gen. :

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$$

Esempio 5

$$u'' - 4u' = 0$$

Polinomio :  $x^2 - 4x = 0$   
 $x(x-4) = 0$

Radici :  $x = 0, x = 4$

Base :  $e^{0t} = 1, e^{4t}$

Soluz. generale :

$$u(t) = a + b e^{4t}$$

Esempio 6

$$u'' + 4u = 0$$

Polinomio :  $x^2 + 4 = 0$

Radici :  $x^2 = -4$

$x = \pm 2i$  (del tipo  $\alpha \pm i\beta$  con  
 $\alpha = 0$  e  $\beta = 2$ )

Base :  $e^{0t} \cos(2t)$   $e^{0t} \sin(2t)$ , cioè  $\cos(2t), \sin(2t)$

Soluz. generale

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Esempio 7

$$u^{IV} + 2u'' + u = 0$$

Polinomio:  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$   
 $(x^2 + 1)^2 = 0$

$$(x^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

Quindi le radici sono  $\pm i$ , entrambe di mult. = 2

$\downarrow$   
 $(\alpha=0, \beta=1)$

Soluz. generale:  $u(t) = a \cos t + b \sin t + c t \cos t + d t \sin t$

— o — o — o —

## EQUAZIONI NON OMOGENEE

Teorema La soluzione generale di un'eq. NON omogenea è della forma

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOLUZIONE QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA}}$$

Operativamente: se conosco una soluzione QUALUNQUE  $\bar{u}(t)$ ,  
 le conosco tutte.

**Fatto base**

Se  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  sono 2 soluz. dell'eq. non omogenea, allora  $v_1 - v_2 = w$  è una soluzione dell'omogenea.

Nel caso di eq. del 2° ordine:

$$\left. \begin{aligned} a v_1'' + b v_1' + c v_1 &= f(t) \\ a v_2'' + b v_2' + c v_2 &= f(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} v_1 \text{ e } v_2 \text{ soluz. della} \\ \text{non omog.} \end{array}$$

Sottraggo e ottengo

$$a(v_1'' - v_2'') + b(v_1' - v_2') + c(v_1 - v_2) = 0$$

$$a w'' + b w' + c w = 0 \Rightarrow w \text{ soluz. dell'OMOG.}$$

Dal fatto base segue il teorema. Siano infatti

$\bar{u}(t)$  una soluz. qualunque della non omog.

$u(t)$  un'altra soluz.

Allora

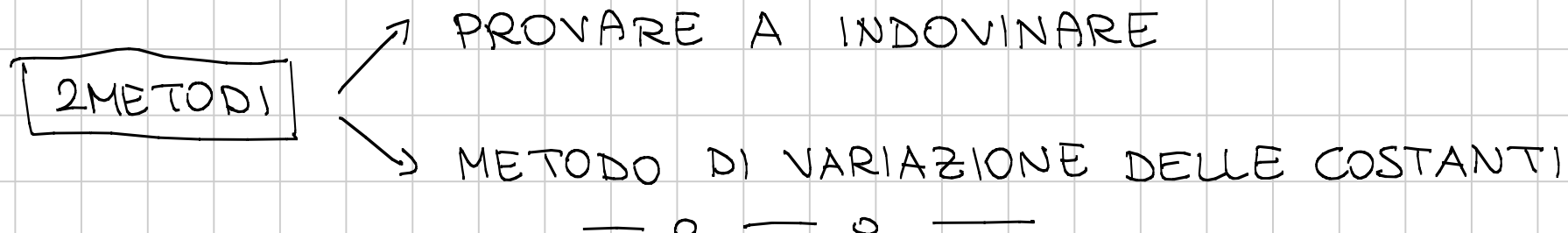
$$u(t) = \underbrace{[u(t) - \bar{u}(t)]}_{\text{soluz. dell'OMOG.}} + \bar{u}(t)$$

SOLUZ. dell'OMOG., quindi della forma

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Bisognerebbe anche dir. che aggiungendo a  $\bar{u}(t)$  una soluz. dell'omogenea si ottiene sempre un'altra sol. della non omog., ma questo si fa allo stesso modo (esercizio)

COME TROVARE UNA SOLUZ. QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA ?



Esempio 1  $u'' + 5u' + 6u = e^t$

Devo trovare una soluzione qualunque. È ragionevole cercare una soluzione del tipo

$$u(t) = \lambda e^t$$

Sostituisco  $u'(t) = \lambda e^t$ ,  $u''(t) = \lambda e^t$

$$u'' + 5u' + 6u = e^t$$

$$\lambda e^t + 5\lambda e^t + 6\lambda e^t = e^\lambda \quad 12\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{12}$$

Una soluz. è  $\bar{u}(t) = \frac{1}{12} e^t$

Sol. gen. :  $u(t) = \frac{1}{12} e^t + \underbrace{ae^{-2t} + be^{-3t}}_{\substack{\text{SOLUZ. GEN. EQ.} \\ \text{OMOGENEA} \\ u'' + 5u' + 6u = 0}}$

Esempio 2  $u'' + 5u' + 6u = e^{2t}$

Cerco una soluz. del tipo  $u(t) = \lambda e^{2t}$

$u'(t) = 2\lambda e^{2t}$   $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$  Sostituisco

$$\underbrace{4\lambda e^{2t}}_{u''} + \underbrace{10\lambda e^{2t}}_{5u'} + \underbrace{6\lambda e^{2t}}_{6u} = e^{2t}$$

$$20\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \text{sol. gen.: } u(t) = \frac{1}{20} e^{2t} + a e^{-2t} + b e^{-3t}$$

Esempio 3  $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$  Tentativo:  $u(t) = \lambda e^{-2t}$

$$u'(t) = -2\lambda e^{-2t}$$

$$u''(t) = 4\lambda e^{-2t}$$

Sostituisco:  $4\lambda e^{-2t} - 10\lambda e^{-2t} + 6\lambda e^{-2t} = e^{-2t}$

$\underbrace{4\lambda e^{-2t}}_{u''} \quad \underbrace{-10\lambda e^{-2t}}_{+5u'} \quad \underbrace{+6\lambda e^{-2t}}_{+6u}$

$$0 = e^{-2t} \quad !!!$$

Doveva venire 0 perché  $e^{-2t}$  è sol. dell'eq. omog., cioè sostituito in  $u'' + 5u' + 6u$  dà per forza 0.