

Eq. Diff. LINEARI di qualunque ordine a coeff. costanti

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ sono NUMERI, detti coefficienti

L'eq. si dice OMOGENEA $\Leftrightarrow f(t) = 0$

CASO OMOGENEO

1^a osservazione generale: l'interv. max di esistenza della soluzione è lo stesso di $f(t)$, quindi nel caso omogeneo è tutto $\mathbb{R}$

Teorema

L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. LINEARE OMOGENEA di ordine n (anche a coeff. non costanti) è uno SPAZIO VETTORIALE di dimensione n .

Fissata una BASE $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di questo spazio, tutti gli d. si scrivono nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Operativamente: se riesco a determinare UNA base, conosco la soluzione generale, cioè riesco a descrivere l'insieme delle infinite soluzioni.

Nel caso di equazioni a coeff. costanti, esiste una procedura che permette di determinare una base

"Esiste" a patto di saper trovare le radici di un polinomio di grado n .

CASO PARTICOLARE $n=2$

Ho un'eq. del tipo

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

Considero il polinomio
e ne calcolo le radici

$$a x^2 + b x + c$$

1^a possibilità

2 radici reali distinte λ, μ ($\Delta > 0$). Una base è

$$e^{\lambda t}, e^{\mu t}$$

Dunque la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

2^a possibilità

$\Delta = 0 \Rightarrow$ una radice reale λ di mult. = 2.

Una base è

$$e^{\lambda t}$$

$$t e^{\lambda t}$$

Nota bene $t e^{\lambda t}$ non è
multiplo di $e^{\lambda t}$ per una
costante, quindi
sono lin.
indip.

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3^a possibilità

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$
($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Perché funziona? Risposta furbetta: nei vari casi basta sostituire gli el. della base nell'eq. e vedere che la soddisfanno !!!

Risposta un po' più motivata: cerco delle soluzioni dell'eq. che siano del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad u'(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Se sostituisco nell'eq. $au'' + bu' + cu = 0$ ottengo

$$e^{\lambda t} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$\uparrow$
 $\neq 0$

$\downarrow$ questo fa 0 $\Leftrightarrow \lambda$ è una radice del polinomio

- se ci sono 2 radici reali ho finito perché ho 2 sol. lin. indep.

- se c'è una radice reale di $\text{mult} = 2$, ho trovato 1 soluz.
Mettendo "t davanti" e sostituendo si vede che se ne
ottiene un'altra

- se le 2 radici sono $\alpha \pm i\beta$, verrebbe da dire che una base
è

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

ma

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

e questo rende plausibile che una base sia

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

EQ. DI ORDINE n

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

Considero il polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Questo sui complessi ha n radici (contate con molteplicità)

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. k produce : $\underbrace{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}}_{k \text{ elem. della base}}$
- Ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di radici compl. coniugate di molt. 1 produce $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta \dots$ di molt. k produce $2k$ elem. della base
 $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$