

EQUAZIONI LINEARI 1° ORDINE (coeff. variabili)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

FATTORE INTEGRANTE

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$$A'(t) = a(t)$$

Moltiplico a destra e sx per

$$e^{A(t)}$$

Fattore
integrante

$$u' e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u = b(t) e^{A(t)}$$

$$(u e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}$$

Ora integro a destra e sinistra

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

Moltiplico per $e^{-A(t)}$ e ricavo che

$$u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(t) e^{A(t)} dt \right\}$$

SOLOZIONE
GEN. EQ.
LINEARE
1° ORDINE

Oss. Quindi le lineari del 1° ordine si sanno risolvere a patto di

- ① Saper fare una primitiva di $a(t)$
- ② Saper fare una primitiva di $b(t) e^{A(t)}$

Oss. 2 La soluzione di un'eq. lineare esiste sempre finché può (cioè fino quando i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono definiti).

In particolare l'intervallo max. di esistenza non dipende dal dato iniziale, ma solo dai coeff.

Esempio 1 $u' = u + t$ ← Non è a variabili separabili

$$u' - u = t$$

$\swarrow$ $a(t) = -1$ $\nwarrow$ $b(t)$

$A(t) = -t$ Fattore integrante: e^{-t}

$$u'e^{-t} - ue^{-t} = te^{-t}$$

$$(ue^{-t})' = te^{-t}$$

Integro

$$ue^{-t} = \int te^{-t} dt = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt + c$$

$\underbrace{\quad}_F \underbrace{\quad}_g$ $\underbrace{\quad}_F \underbrace{\quad}_G$ $\underbrace{\quad}_F \underbrace{\quad}_G$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} dt + c$$

$$= -te^{-t} - e^{-t} + c$$

Quindi $ue^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + c$

Ora moltiplico tutto per e^t

$$u(t) = -t - 1 + ce^t$$

SOLUZ. GENERALE

Esistenza globale per $t > 0$ e $t < 0$, come si poteva prevedere dai coeff.

Esempio 2 $\begin{cases} u' + \frac{u}{t} = t^2 + 1 \\ u(1) = \alpha \end{cases}$

$$a(t) = \frac{1}{t}, \quad b(t) = t^2 + 1$$

↑
per $t=0$ l'eq.
non ha senso

Int. max. esistenza: $(0, +\infty)$

$A(t) = \log t$ ← viene 1-1 perché già sappiamo che ci interessano solo $t > 0$.

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\log t} = t$

Molt. per t : $tu' + u = t^3 + t$

$$(tu)' = t^3 + t$$

$$tu(t) = \int (t^3 + t) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C$$

$$u(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{C}{t}$$

Nota α , posso ricavare C . Nota bene: se $C \neq 0$, la soluzione ha blow-up per $t=0$

Se $C=0$ (e questo accade per un preciso valore di α) allora non c'è BLOW-UP per $t=0$. Cosa accade per $t=0$?

Esempio 3
$$\begin{cases} u' = u - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

$$u' - u = -\arctan t \quad a(t) = -1 \quad b(t) = \arctan t$$

Fatt. integr. : $e^{A(t)} = e^{-t}$

$$u' e^{-t} - u e^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$(u e^{-t})' = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$u e^{-t} = -\int e^{-t} \cdot \arctan t \, dt + c$$

$$u(t) = e^t \left\{ c - \int e^{-t} \cdot \arctan t \, dt \right\}$$

FORMULA
GENERALE

Determiniamo c

$$u(0) = \alpha$$

$$u(0) = e^0 \{ C - 0 \}$$

↑ sto prendendo la primitiva
di $e^{-t} \cdot \arctan t$ che fa 0 in $t=0$

$$\Rightarrow u(0) = C = \alpha$$

Domanda! come si comporta $u(t)$ per $t \rightarrow +\infty$?

Ci sono valori di α (quindi di C) per cui $u(t) \rightarrow +\infty$?
 " " " " " $u(t) \rightarrow -\infty$?

$$u(t) = \boxed{e^t} \left\{ \boxed{C} - \boxed{\int e^{-t} \cdot \arctan t \, dt} \right\}$$

↓
 $+\infty$

↓
 C

↓
 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \arctan t \, dt$

↑
integrale improprio che
converge

$$0 \leq e^{-t} \cdot \arctan t \leq 10 e^{-t}$$

$\int 10 e^{-t} dt$ con pb. a $+\infty$ converge $\Rightarrow \int$ dato converge ad un numero l

Tutto dipende dal segno di $c-l$;

- * se $c > l$, allora $u(t) \rightarrow +\infty$
- * se $c < l$, allora $u(t) \rightarrow -\infty$
- * se $c = l$, allora il limite è $\infty \cdot 0$

$$\frac{c - \int_0^t e^{-s} \cdot \arctan s \, ds}{e^{-t}} \stackrel{\text{H\^op}}{\downarrow} = \frac{\cancel{e^{-t}} \arctan t}{- \cancel{e^{-t}}} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$