

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ Eq. diff. 1° ordine AUTONOMA
a variabili separabili

1. SEPARARE

$$\frac{du}{dt} = u^2$$

$$\frac{du}{u^2} = dt$$

2. INTEGRARE

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{u} = t + c$$

3. RICAVARE

$$\frac{1}{u} = -t + c \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{1}{c-t}$$

SOLU3. GENERALE

4. DET. C

$$u(0) = 1$$

" "

$$\frac{1}{c} = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

Soluz. pb. di Cauchy :

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

5 CONTROLLARE

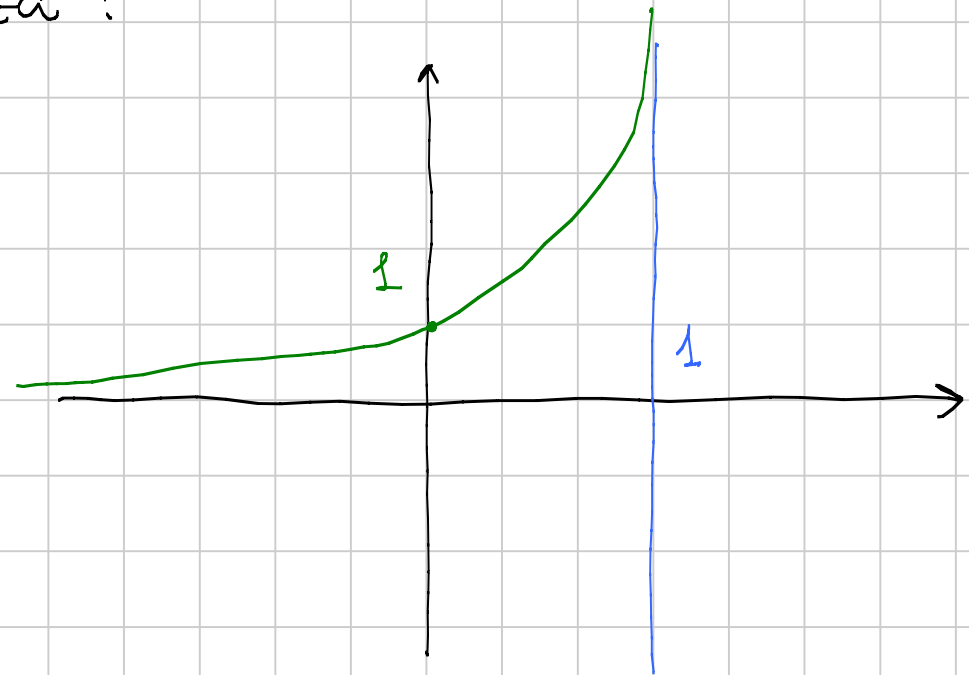
6 STUDIARE la soluz : definita per $t \neq 1$

$\Rightarrow$ int. max. di esistenza :

$$(-\infty, 1)$$

Tempo di vita : $T=1$

Si ha blow-up per $T=1$



Esempio 2

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases} \leftarrow \text{parametro}$$

Soluz. generale $u(t) = \frac{1}{c-t}$

DETERMINARE c (in funzione di α)

$$\frac{1}{c} = u(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\alpha} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{c} = u(0) = \alpha} \right\} \begin{array}{l} \text{vale solo} \\ \text{se } \alpha \neq 0 \end{array}$$

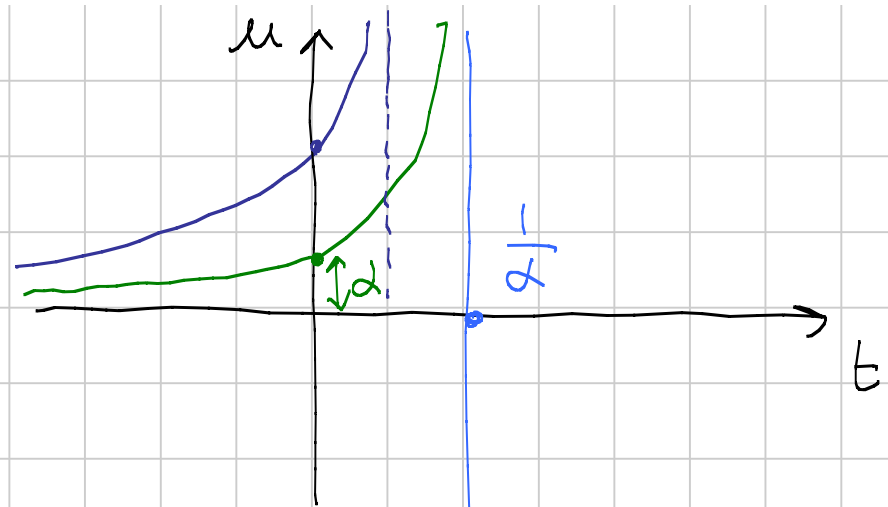
$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t} \quad \left. \vphantom{u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t}} \right\} \begin{array}{l} \text{ha senso e vale} \\ \text{anche per } \alpha = 0 \end{array}$$

STUDIAMO IN FUNZIONE DI α : problemi per $t = \frac{1}{\alpha}$

* Se $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow$ interv. max di esistenza è $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$

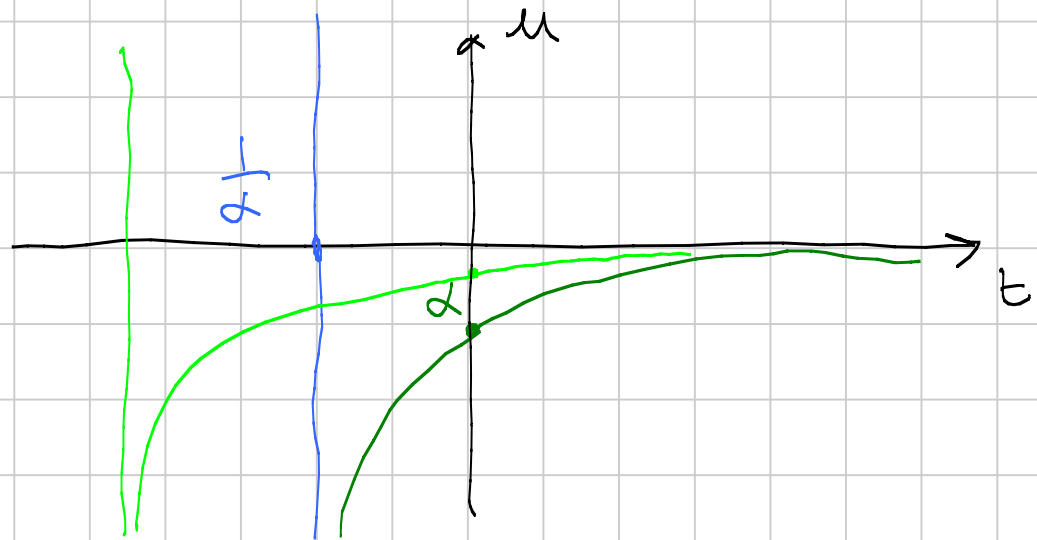
Si ha BLOW-UP per
 $t = \frac{1}{\alpha}$

Più si parte in alto, più
il tempo di vita è breve



* Se $\alpha < 0$, $\frac{1}{\alpha} < 0 \Rightarrow$ interv. max di esistenza è
 $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$

$\Rightarrow$ no esistenza globale per tempi positivi



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases} \dots$ Soluz. gen. $u(t) = \frac{1}{c-t}$

Determino c $\frac{1}{c} = u(0) = 0 \Rightarrow c = ?$

La soluzione ci DEVE essere per il teo. di esistenza e unicità.

In questo caso è la soluzione costante $u(t) \equiv 0$
(è anche l'UNICA per teo. unicità)

Int. max. di esistenza: $\mathbb{R}$

— o — o —

Giustificazione del metodo

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad u'(t) = u^2(t) \Rightarrow \frac{u'(t)}{u^2(t)} = 1$$

Integro a destra e sinistra rispetto a t

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_0^T 1 dt$$

$$\stackrel{||}{[t]_0^T} = T$$

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt =$$
$$\stackrel{||}{\int_1^{u(T)} \frac{dy}{y^2}}$$

Pongo $y = u(t)$

$$\frac{dy}{dt} = u'(t)$$

Quando $t=0$, ho
che $y = u(0) = 1$

$$dy = u'(t) dt$$

Quando $t=T$, ho che $y = u(T)$

$$= \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=1}^{y=u(T)}$$

$$= -\frac{1}{u(T)} + 1$$

$\uparrow$ $y = u(T)$ $\uparrow$ $y = 1$

Uguagliando abbiamo che

$$-\frac{1}{u(\tau)} + 1 = T \Rightarrow -\frac{1}{u(\tau)} = T - 1 \Rightarrow \text{si ricava } u(\tau)$$

N.B. Se $u(0) \neq 0$, allora "ragionevolmente" $u(t) \neq 0$ per valori di t vicini a zero, quindi ha senso dividere per $u^2(t)$

Se $u(0) = 0$, non ha senso nulla, ma in tal caso la soluzione è costante.

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\begin{cases} u' = u \cdot \sin t \\ u(0) = 1 \end{cases} \leftarrow \text{var. separabili LINEARE}$

SEP. $\frac{du}{dt} = u \cdot \sin t \Rightarrow \frac{du}{u} = \sin t \cdot dt$

INT. $\int \frac{du}{u} = \int \sin t \, dt \Rightarrow \log |u| = -\cos t + C$

RIC. $|u(t)| = e^{-\cos t + C}$

$$u(t) = \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right) e^{-\cos t + C}$$

↑ La scelta del segno dipende dal dato iniziale

Nel nostro caso $u(t) = e^{-\cos t + C}$

$$= e^{-\cos t} \cdot e^C$$

$$= k e^{-\cos t}$$

FORMULA +
SEMPLICE PER
SOLUZIONI GENERALI

Mettere il k davanti permette di considerare in un colpo solo sia le soluzioni ottenute prendendo il $+$, sia le soluz. ottenute con il $-$

Esempio 5

$$\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

$\leftarrow$ per forza $\alpha > 0$ perché
abbia senso $\log u$

Oss.: per $\alpha = 1$ la soluzione è la costante $u(t) \equiv 1$.

SEP. $\frac{du}{dt} = u \log u \Rightarrow \frac{du}{u \log u} = 1 dt$

INT. $\int \frac{du}{u \log u} = \int 1 dt \Rightarrow \log |\log u| = t + c$

$$|\log u| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c = k e^t$$

$$\log u = k e^t$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{k e^t}$$

SOLUZ.
GENERALE

DETERMINO k

$$u(0) = \alpha$$

$$u(0) = e^{ke^0} = e^k$$

$$e^k = \alpha \Rightarrow k = \log \alpha$$

Soluz. pb. di Cauchy

$$u(t) = e^{\log \alpha \cdot e^t}$$

Come è fatta $u(t)$ dipende dal segno di $\log \alpha$

* se $\log \alpha > 0$, cioè se $\alpha > 1$, allora $u(t)$ è crescente e definita per ogni $t \in \mathbb{R}$

* se $\log \alpha = 0$, cioè se $\alpha = 1$, allora $u(t) \equiv 1$

* se $\log \alpha < 0$, cioè $0 < \alpha < 1$, allora $u(t)$ è decrescente

