

ANALISI II CIV

ORA 43

$$\begin{cases} u' = t u^4 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

SEPARARE: $\frac{du}{dt} = t u^4$; $\frac{du}{u^4} = t dt$

INTEGRARE: $\int \frac{du}{u^4} = \int t dt$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \frac{t^2}{2} + C$$

RICAVARE

$$\frac{1}{3u^3} = -\frac{t^2}{2} + C = \frac{-t^2 + C}{2} ; 3u^3 = \frac{2}{C - t^2}$$

$$u^3 = \frac{2}{3(C - t^2)} = \frac{2}{C - 3t^2}$$

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{C - 3t^2}}$$

SOLUZIONE GENERALE

DETERMINARE C

$$u(0) = 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{C}} = 2$$

$$\frac{2}{C} = 8 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Soluzione pb. di Cauchy

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{\frac{1}{4} - 3t^2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{1 - 12t^2}} = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 12t^2}}$$

CONTROLLARE Fare la verifica! $u(0) = 2 \sqrt[3]{1} = 2$ Ok.

$$u'(t) = 2 (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}} (-24t) \left(-\frac{1}{3}\right); \quad u(t) = 2 (1 - 12t^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{48}{3} t (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}} = 16 t (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}}$$

↑
Questo DOVREBBE essere $t \cdot u^4$

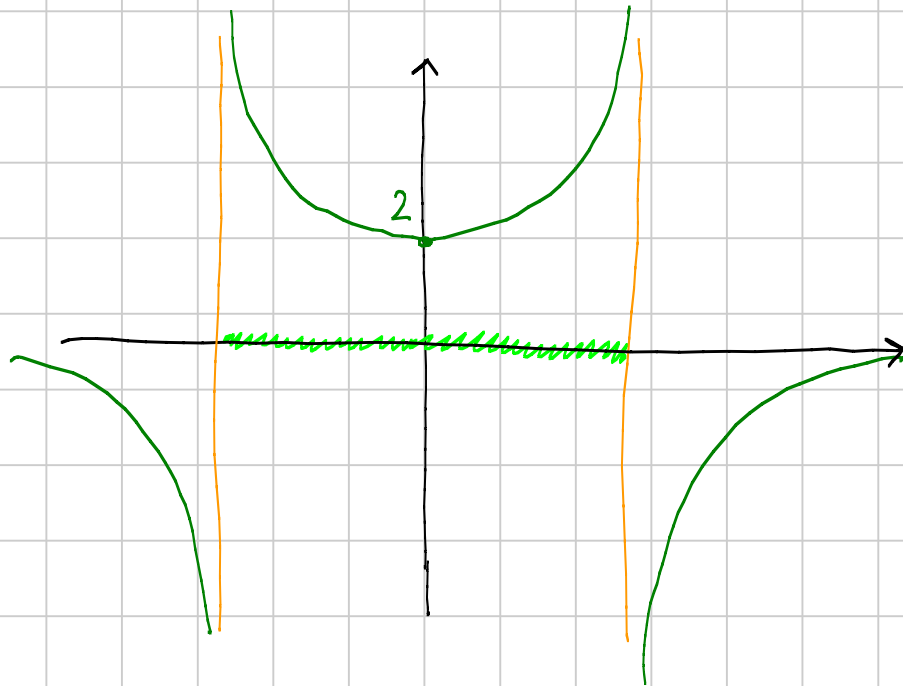
Lo è perché $u^4 = 16 (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}}$

STUDIARE LA SOLUZIONE Studio $u(t) = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 12t^2}}$

Definita quando $1 - 12t^2 \neq 0$ $12t^2 \neq 1$

$$t^2 \neq \frac{1}{12}$$

$$t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{12}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



Def. 1 Si dice intervallo massimale di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione che contiene l'istante iniziale.

Nel vostro esempio l'int. max di esistenza è

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Def. 2 Si dice TEMPO DI VITA della soluzione (LIFE SPAN) l'estremo superiore dell'int. max. di esistenza.

Nel nostro esempio $T = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Def. 3

Si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro se $T = +\infty$, cioè se la soluzione esiste per ogni $t \geq t_0$.

Def. 4

Se il tempo di vita T è $< +\infty$, diciamo che si ha BLOW-UP (SCOPPIAMENTO) se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty$$

Diciamo che si ha BREAK-DOWN (ROTTURA) se non c'è blow-up, ma

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

↑
Derivata

Nell'esempio la soluzione aveva BLOW-UP per $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Esempio 3

$$\begin{cases} u' = u^2 + 1 \\ u(0) = -1 \end{cases} \leftarrow \text{Eq. a variabili separabili}$$

SEPARARE

$$\frac{du}{dt} = u^2 + 1 \quad ; \quad \frac{du}{u^2 + 1} = dt$$

INTEGRARE

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \int dt \quad ; \quad \arctan u = t + c$$

RICAVARE

$$u = \tan(t + c)$$

Soluzione generale

DETERMINARE C

$$u(0) = -1 \Leftrightarrow \tan c = -1 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}$$

$$u(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Soluzione pb. Cauchy

CONTROLLARE

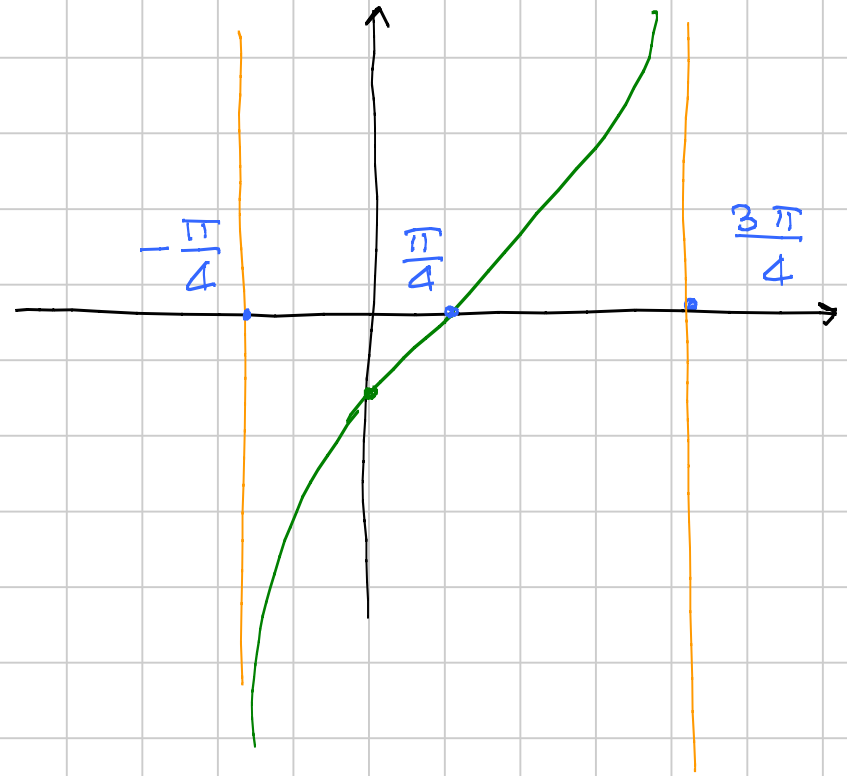
STUDIARE

È definita quando $t - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Int. max. di esistenza:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

LIFE SPAN : $\frac{3\pi}{4}$



La soluzione ha blow-up
per $t = \frac{3\pi}{4}$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\begin{cases} u' = \frac{t}{u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$ SEPARARE $\frac{du}{dt} = \frac{t}{u}$

$$u \, du = t \, dt$$

INTEGRARE $\int u \, du = \int t \, dt$ $\frac{u^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C$

RICAVARE

$$u^2 = t^2 + c$$

$$u = \pm \sqrt{t^2 + c}$$

DETERMINARE C

$$u(0) = 1$$

$$1 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 1$$

Sol. pb. di Cauchy : $u(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

$\Rightarrow$ Nessun problema $\Rightarrow$ esistenza globale per tempi
positivi e negativi

Esempio 5

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u}$$

$$u \, du = -dt$$

integro: $\frac{u^2}{2} = -t + c \Rightarrow u^2 = -2t + c$

$$u(t) = \pm \sqrt{c - 2t}$$

Ricavo c:

$$u(0) = 3$$

$$\sqrt{c} = 3 \Rightarrow c = 9$$

Soluz. pb. di Cauchy: $u(t) = \sqrt{9-2t}$

Definita quando $9-2t \geq 0 \Rightarrow 2t \leq 9 \Rightarrow t \leq \frac{9}{2}$

Int. max. di esistenza: $(-\infty, \frac{9}{2}]$

↑ Tempo di vita

Quando $t \rightarrow \frac{9}{2}^-$

abbiamo che $u(t) \rightarrow 0$
(NO BLOW-UP)

ma $u'(t) \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ BREAK-DOWN

