

ANALISI II CIV

ORA 41
MISSING

ORA 42

Titolo nota

05/12/2006

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica: $u'(t) = 2e^t$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione qualunque sia il valore della costante $c \Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Si potrebbe dim. che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $u'' = -u$ Una soluzione è $u(t) = \sin t$
Un'altra è $u(t) = \cos t$

In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione qualunque siano i valori di a e b

$\Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da 2 param.

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -u^2(t)$

Una famiglia infinita di soluz. è $u(t) = \frac{1}{t+c}$

$\Rightarrow$ infinite soluz. dipendenti da un parametro.

IN GENERALE: un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ORDINE dell'equazione.

— o — o —

PROBLEMA DI CAUCHY

Eq. diff. + condiz. iniziali in numero uguale all'ordine dell'eq.

Esempi

$$\begin{cases} u' = u + t & \leftarrow \text{Eq. diff. di ordine 1} \\ u(0) = 7 & \leftarrow 1 \text{ cond. iniziale (fissare il valore di } u \\ u(t_0) = u_0 & \text{per un certo valore di } t) \end{cases}$$

$\nwarrow \nearrow$
numeri fissati

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(7) = 12 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} u'' = u^2 + t & \leftarrow \text{Eq. diff. di ordine 2} \\ u(0) = 5 \\ u'(0) = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \swarrow \end{matrix} \quad \text{Due condizioni iniziali}$$

Per avere un problema di Cauchy devo assegnare i valori di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima in uno stesso punto t_0

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 6 \\ u'(7) = 6 \end{cases}$$

No pb. di Cauchy
ho dato u e u'
per valori diversi
di t

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(0) = 5 \\ u(3) = 6 \end{cases}$$

↑
No pb. di
Cauchy: dovuto
assegnare u e u'

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 7 \\ u'(5) = 6 \end{cases}$$

↑
Sì pb. di
Cauchy

$$\begin{cases} u''' = u' + t \\ u(5) = 6 \\ u'(5) = 8 \\ u''(5) = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 7 \\ u''(5) = 7 \end{cases}$$

↑ NO! Dovrebbe essere u'

Consideriamo un problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine n in forma normale

$$u^{(n)} = \Phi(u^{(n-1)}, \dots, u', u, t)$$

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = u_1$$

$\vdots$

$$u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$$

TEO. ESISTENZA E
UNICITÀ.

- Se Φ è continua allora il problema ammette ALMENO una soluzione LOCALE, cioè definita almeno per valori di t vicini a t_0 .
- Se Φ è un po' meglio (diciamo differenziabile) allora la soluzione è UNICA.

EQUAZIONI 1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

$$u' = f(t) g(u)$$

È possibile trovare la formula generale della soluzione in 3 fasi:

SEPARARE
INTEGRARE
RICAVARE

Esempio $u' = t^2 u^3$

SEPARARE : $\frac{du}{dt} = t^2 u^3$

Tutte le u a sinistra,
tutte le t a destra!

$$\frac{du}{u^3} = t^2 dt$$

INTEGRARE (a sinistra risp. a u , a destra risp. a t)

$$\int \frac{du}{u^3} = \int t^2 dt \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{t^3}{3} + C$$

RICAVARE (u in funzione di t)

$$\frac{1}{2u^2} = -\frac{t^3}{3} + \boxed{C}$$

↑ è una costante, quindi chiamarla c o $-c$
è lo stesso

$$\frac{1}{2u^2} = \frac{-t^3 + \boxed{C}}{3} \text{ come sopra}$$

$$2u^2 = \frac{3}{C - t^3}$$

$$u^2 = \frac{3}{2(C - t^3)}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{3}{2(C - t^3)}}$$

Questa formula
fornisce le
infinitesime sol.
dell'eq.

Se avessi avuto il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t^2 u^3 \\ u(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Sulla base di questa si ricava il valore di } c$$

DETERMINARE c

$$u(0) = 1$$

$$u(0) = \sqrt{\frac{3}{2c}} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2c} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

scelgo segno +
perché $u(0) > 0$

$\Rightarrow$ la soluzione del pb. di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{2\left(\frac{3}{2} - t^3\right)}} = \sqrt{\frac{3}{3 - 2t^3}}$$

CONTROLLARE! Il modo migliore per farlo è sostituire nell'eq. dopo aver derivato

$$u' = \dots$$

Per controllare la cond. iniz. basta sostituire $t=0$

$$u(0) = \sqrt{1} = 1 \quad \text{OK.}$$

STUDIARE LA SOLUZIONE

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{3-2t^3}}$$

La soluzione esiste finché $3-2t^3 > 0 \Leftrightarrow 2t^3 < 3$

$$\Leftrightarrow t^3 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

La soluzione non è definita per ogni t , ma almeno per t vicini a $t=0$.

