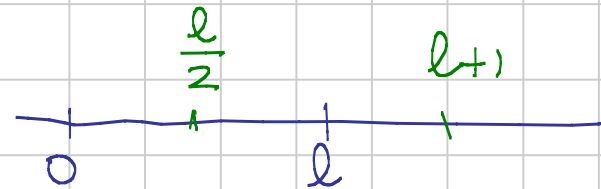


ANALISI II CIV

ORA 38

Dim. caso standard con gruppo asint.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \pm \infty \end{matrix}$$



Essendo il limite $= l$, avremo che per x vicini ad x_0 si ha che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l+1$$

[N.B. $g(x) > 0$ quindi
molt. senza cambiare
versi]

quindi

$$\frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq (l+1) g(x)$$

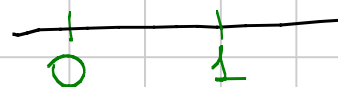
Se $\int g(x) dx = +\infty$, allora (disug. di sinistra) $\int f(x) dx = +\infty$

Se $\int g(x) dx < +\infty$, allora (disug. di destra) $\int f(x) dx < +\infty$,
— o — o —

[CONFRONTO ASINTOTICO (CASI LIMITE)]

Stessa situazione del confronto asint. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$



[Allora per x vicini a x_0 si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, quindi $f(x) \leq g(x)$, quindi]

$\int g(x) dx$ con pb. in x_0 conv. $\Rightarrow \int f(x) dx$ con pb. in x_0 conv.

" " $\frac{\text{diverge}}{0} \Rightarrow$ BOH

Analogamente se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

[allora per x vicini a x_0 si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, quindi $f(x) \geq g(x)$ vicino a x_0 , quindi]

$\int g(x) dx$ con pb. in x_0 div. $\Rightarrow \int f(x) dx$ con pb. in x_0 div.

Com. $\Rightarrow$ BOH.

Esempio 1

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \log x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \log x} > 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

caso limite!!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \log x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

[$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al prob $\Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow$]

$\int g(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ conv. $\Rightarrow \int f(x) dx$ conv.

Esempio 2 $\int_3^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$

$\log x$ in questo caso REHA CONTRO, nel senso che rende la funzione + grande $\Rightarrow$ ostacola la conv.

Provare ① C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ---- $\Rightarrow$ BOH

② C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ ---- $\Rightarrow$ BOH

Ora provo con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^2} \cdot x\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$[\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \text{ vicino al pb} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \text{ vicino al pb.} \Rightarrow]$$

$$\int g(x) dx = \int \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.} \Rightarrow \text{int. dato conv.}$$

N.B. Al posto di $\frac{3}{2}$ posso usare un qualunque esponente $1 < \alpha < 2$.

ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

Sia $f(x)$ una integranda a
seguo variabile nella zona
di cub. E .

Allora

$$\int_E |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ conv.}$$

Questo ha integranda
 $\geq 0 \Rightarrow$ posso applicare
i criteri precedenti

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Esempio 1

$$\int_7^{+\infty} \boxed{\frac{\sin x}{x^2}} dx$$

$f(x)$ a segu
variabile

Provo con l'assol. int.,
cioè studio

$$\int_7^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$$

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int \frac{dx}{x^2}$ con pb. a $+\infty$ conv. (tabellina)

$\Downarrow \rightarrow$ Criterio confronto fra integrande positive

$\int \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ conv.

$\Downarrow \rightarrow$ Assol. int.

$\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ conv.

$$\frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ conv.} \xrightarrow{\text{confr.}} \int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

NOOO

Non si può usare il confronto se non si hanno segni ≥ 0

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{CONV.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \dots}_{\text{CONV}} dx \Rightarrow \text{CONV.}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx$ conv. (sostanzialmente come esempio prec.)

$\int_0^1 \boxed{\frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2}} dx$ (come prima, Se faccio l'assol. int. mi ritrovo alla fine $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ che diverge $\Rightarrow$ BOH)

$f(x) \geq 0$ per x vicini a 0

Brutale: $\frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con pb. in 0 conv. $\Rightarrow$ l'int. dato converge

Rigoroso: confr. asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = 1$$

$\Rightarrow$ stesso comportamento

Esempio 3

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Numero}$$

Non ha nessun problema



Non è un integrale improprio ($f(x)$ è limitata)

