

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx =$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_{x=0}^{x=A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$$

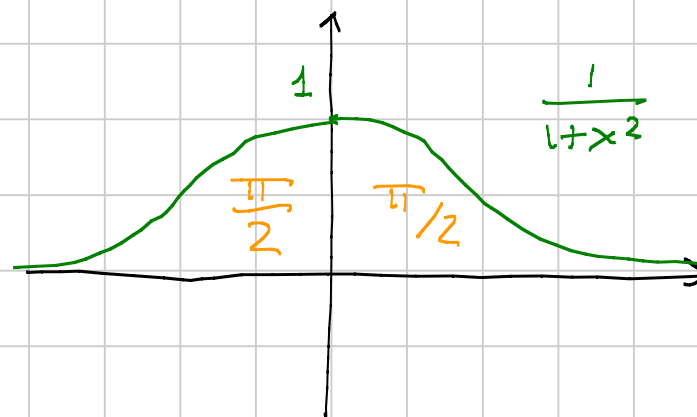
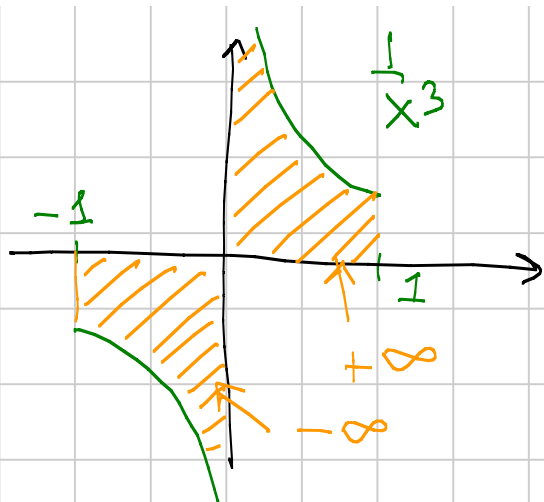
Esempio 7 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

NOOOOOO !!!!!!!

Ho operato come se fosse un integrale
PROPRIO, invece è IMPROPRIO

$$= \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{DIVERGE } A \rightarrow -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{DIVERGE } A \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx \text{ è indeterminato}$$



Esempio 8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{x=0}^{x=A} =$$

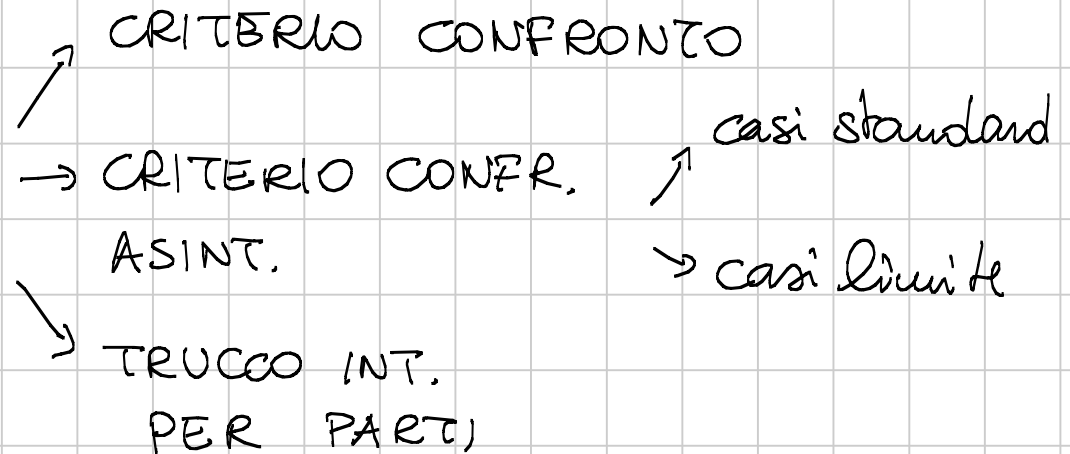
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{per simmetria o per } \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_{-A}^0 \dots)$$

In generale non si sanno calcolare i valori esatti degli int. impr.

In questi casi si studia la convergenza,

integrali con integranda
a segno costante (positivo)



integrali con integranda
a segno variabile

→ CRITERIO ASSOLUTA
INTEGRABILITÀ

Se l'integranda è a segno costante, l'integrale può solo

↗ convergere (ad un certo $l \in \mathbb{R}$)

↘ divergere a $+\infty$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$.

Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ per ogni x nella zona di integrazione E .

Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ CONV.}$$

N.B.

$$\int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\int_E f(x) dx \text{ CONV} \Rightarrow \text{BOH.}$$

— o — o —

CONFRONTO ASINTOTICO

Siano

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

due int. impropri MONOPROBLEMA. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ nella zona di integr. Sia x_0 il punto in cui c'è il problema (x_0 può essere uno degli estremi dell'intervallo, oppure $x_0 = \pm \infty$ in caso di zona di int. non limitata).

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$$\left[\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array} \right. \text{ caso standard}]$$

Allora $\int f(x) dx$ e $\int g(x) dx$ con problema in x_0

hanno lo stesso tipo di comportamento (cioè uno conv $\Rightarrow$ conv. anche l'altro)

— o — o —

Esempio 1

$$\int_3^{+\infty} \boxed{\frac{7x+9}{5x^2+2}} dx$$

$f(x) > 0$

Può solo conv. o
div. a $+\infty$

Problema è a $+\infty$

Brutale : $\frac{7x+9}{5x^2+2} \sim \frac{7x}{5x^2} = \frac{7}{5x}$

$\uparrow$
per x
grande

L'integrale dato si comporta come l'int. improprio di $\frac{1}{x}$ con problema a $+\infty$, dunque (TABELLINA) diverge.

RIGOROSO: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x+9}{5x^2+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2+9x}{5x^2+2} = \frac{7}{5} \neq 0 \neq +\infty$$

↑
PROBLEMA

⇒ stessa conclusione del brutale
— 0 —

Esempio 2

$$\int_0^4 \frac{dx}{\arctan x}$$

per $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} \geq 0 \quad (>0)$$

problema in $x_0 = 0$

Brutale: $\arctan x \sim x \Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{x} \Rightarrow$ l'int. DIVERGE

RIGOROSO: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1 \neq 0 \neq +\infty \Rightarrow \text{stesso comp.}$$

↑
PROBLEMA

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \boxed{\frac{1}{x^4 + \sqrt{x}}} dx = \int_0^{14} \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx + \int_{14}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx$$

$f(x) > 0$ CONV. CONV SPEZZAMENTO

$$\int_{14}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + \sqrt{x}}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^4}$$

$\uparrow$
 x grandi

$\Rightarrow$ si comporta come $\int \frac{1}{x^4} dx$ con probl. a $+\infty$,
quindi converge

[Rigoroso per esercizio]

$$\int_0^{14} \frac{dx}{x^4 + \sqrt{x}}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\uparrow$
 $x \sim 0$

$\Rightarrow$ si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}}$
con prob. a 0
quindi converge

$\Rightarrow$ l'integrale dato converge

Esempio 4

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \underbrace{\int_0^7 \frac{dx}{x^2}}_{+\infty} + \underbrace{\int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{conv.}} = +\infty$$

Esempio 5

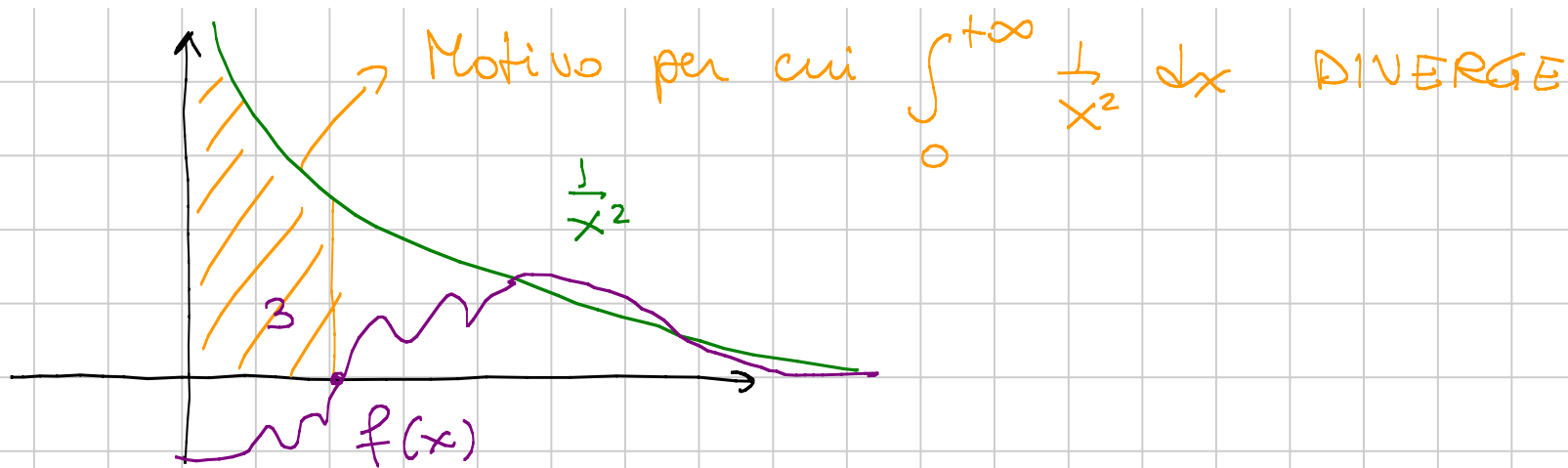
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 9}{\underbrace{x^4 + 7x^3 + 12}_{f(x)}} dx$$

Brutale : $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ grandi}}}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Quindi $\int f(x)$ con
problema a $+\infty$ si comporta
come $\int \frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$
quindi converge.

quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comporta
come $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ dunque DIVERGE

NOOOOOOO



N.B. $f(x)$ non è ≥ 0 su tutta la zona di integrazione, ma solo "vicino al problema".

Questo basta per applicare i criteri.

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_0^{10} f(x) dx}_{\substack{\text{INT. PROPRIO} \\ \rightarrow \text{NUMERO}}} + \underbrace{\int_{10}^{+\infty} f(x) dx}_{\substack{\text{INT. IMPROPRIO} \\ \text{con integranda } \geq 0}}$$