

ANALISI II ^{CIV} (NUCL)

Titolo nota

ORA 36

28/11/2006

INTEGRALI IMPROPRI IN 1 VARIABILE

integrali propri $\nearrow$ zona di integr.: intervallo $[a, b]$ limitato
 $\searrow$ funzione integranda limitata

Se salta 1 o entrambe le condizioni, l'int. si dice IMPROPRIO

Esempi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

funz. limitata
zona di int. non
limitata

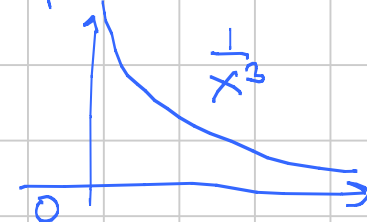
$$\int_0^2 \frac{1}{x} dx$$

zona int. lim.
 $\frac{1}{x}$ non limitata



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

entrambi i
problemi



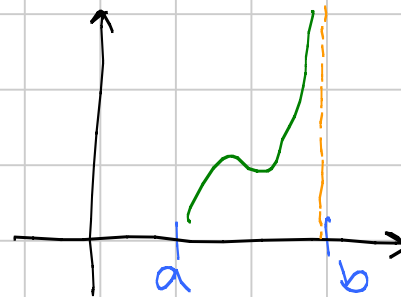
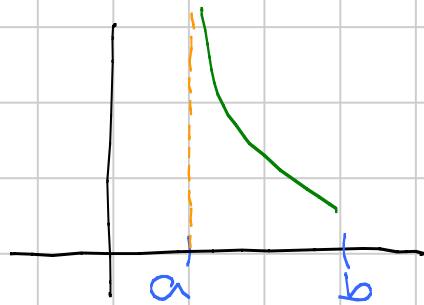
INTEGRALI MONOPROBLEMA, cioè con 1 solo tipo di problema

→ funzione limitata, zona di integrazione non limitata del tipo $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

①

→ zona di integrazione: intervallo $[a, b]$

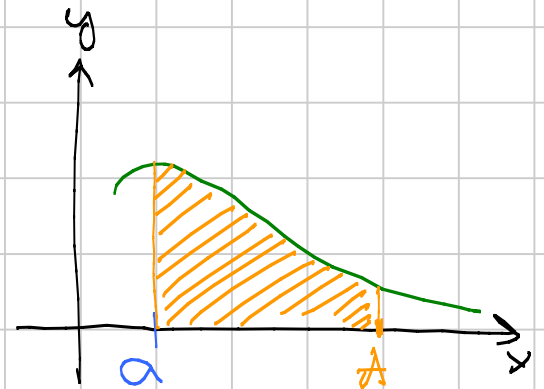
② integranda $f(x)$ non limitata per $x \rightarrow a^+$ oppure $x \rightarrow b^-$



DEFINIZIONE DI INTEGRALE IMPROPRIO

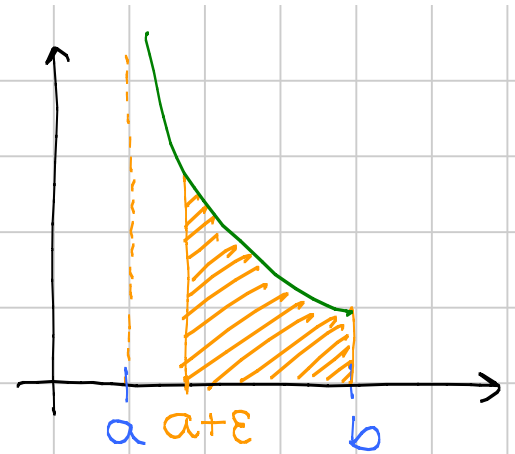
Caso ①

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^A f(x) dx}_{\text{INT. PROPRIO}}$$



Caso ② Funzione con problemi per $x \rightarrow a^+$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



Funzione con problemi per $x \rightarrow b^-$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

INT. IMPR. MONOPROBLEMA: limite di integrali propri.

Un int. improprio ^{può} MONOPROBLEMA

- convergere ad un certo $l \in \mathbb{R}$
- divergere a $+\infty$
- divergere a $-\infty$
- essere indeterminato

Se l'integrale ha tanti problemi, va spezzato nella somma di tanti integrali monoproblema.

Esempi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{x^3} dx}_{\substack{\text{zona int. OK} \\ \text{funzione NO}}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx}_{\substack{\text{funzione OK} \\ \text{zona int. NO}}}$$

MONOPROBLEMA

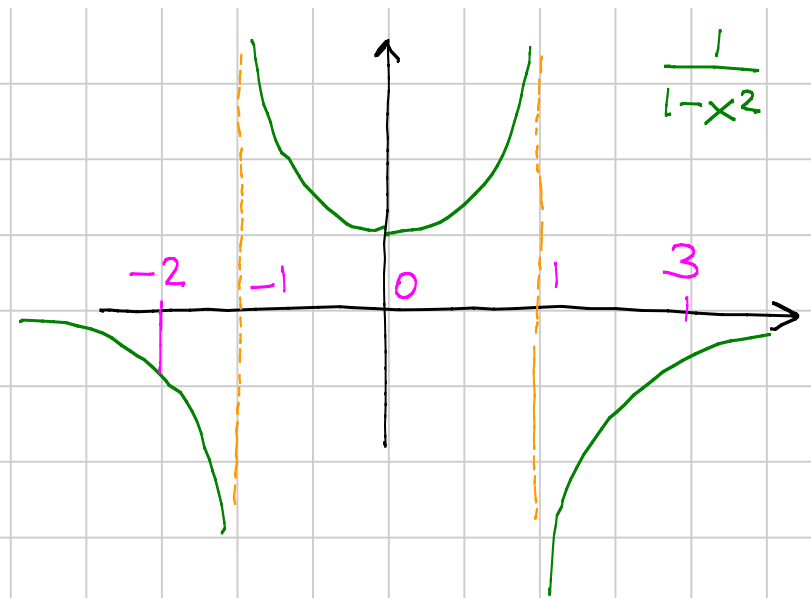
il 5 può
essere sostituito da qualsiasi
cosa > 0 .

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^3 \frac{dx}{x^2}$$

il problema è
in $x=0$, quindi non
ricade nel caso ②

MONOPROBL.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$



Dopo aver fatto lo spezzamento

→ si studiano separatamente i vari pezzi

→ si det. il comportamento generale sulla base del comp. dei vari pezzi

(NOTA BENE: se esiste un pezzo che diverge a $+\infty$ e un pezzo che diverge a $-\infty$, per definizione si dice che l'int. di partenza è INDETERMINATO)

NOTA BENE: il comportamento non dipende dagli estremi "virtuali" introdotti nello spezzamento

Esempi di studio di integrali monoprobema

$$\textcircled{1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_{x=1}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log A - \log 1] = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

$$\textcircled{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{A} + 1 \right] = 1 \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

$$\textcircled{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[2\sqrt{x} \right]_{x=1}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{A} - 2] = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

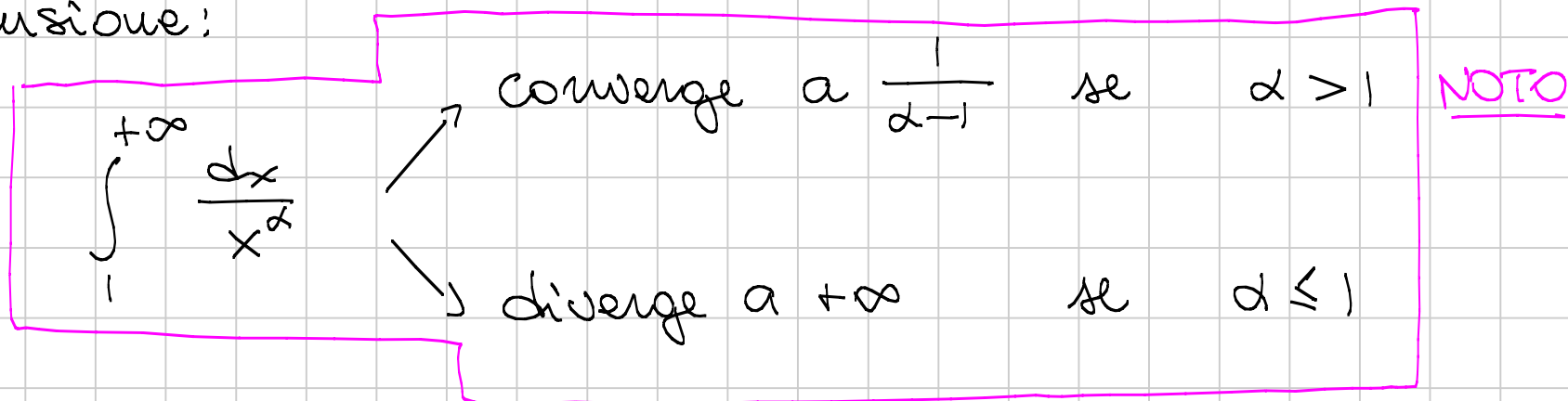
$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=1}^{x=A} = \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

→ se $\alpha-1 > 0$ tende
ad $\frac{1}{\alpha-1}$

↘ se $\alpha-1 < 0$ tende
a $+\infty$

N.B. Se $\alpha-1=0$, cioè $\alpha=1$, non posso fare la prim. come l'ho fatta. Tuttavia diventa il caso di $\frac{1}{x}$ fatto prima.

Conclusione:



$$\textcircled{5} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\alpha-1} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right]$$

se $\alpha-1 > 0$ $[] \rightarrow -\infty$,
quindi il limite è $+\infty$

se $\alpha-1 < 0$ $[] \rightarrow 1$,
quindi il limite è $\frac{1}{1-\alpha}$

Il caso $\alpha=1$ va fatto a parte
(esercizio)

Conclusione:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge a $\frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$

diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$



Con problema a $+\infty$, più l'esponente è alto, più è facile che converga



Vicino a $x=0$ più l'esponente è grande, più la funzione è grande, più è facile che l'integrale diverga