

ANALISI 2 CIV

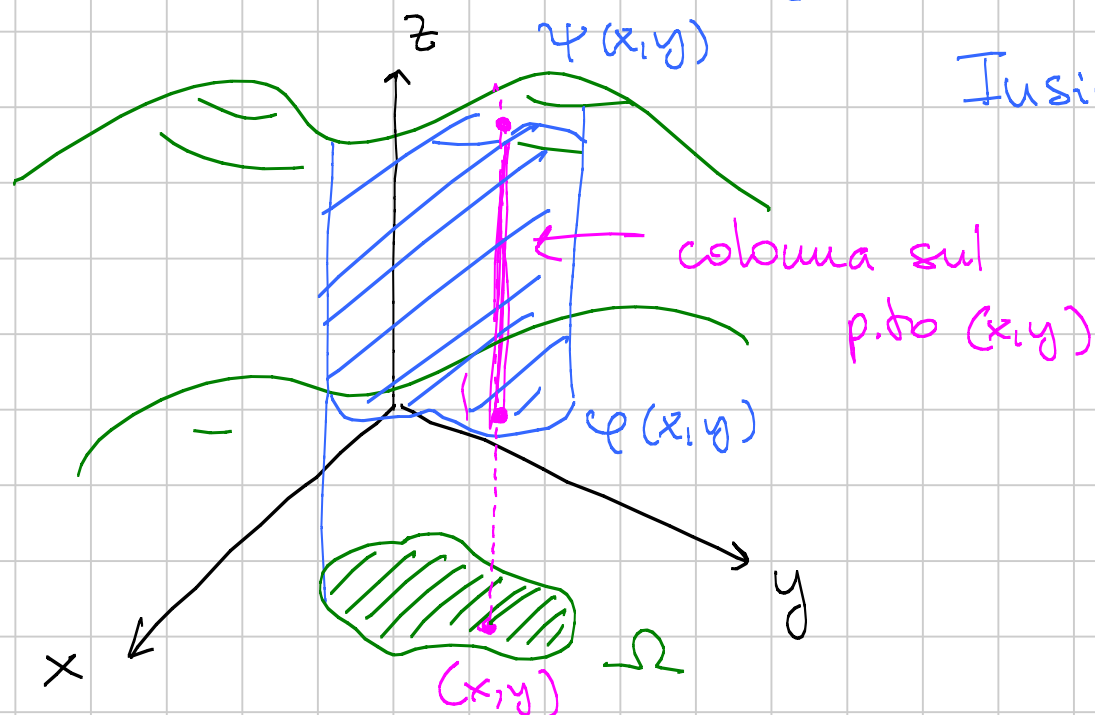
ORA 32

INSIEME NORMALE RISPETTO AL PIANO xy

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

↑
insieme
di $\mathbb{R}^3$

↑
insieme del
piano
(la BASE)



Insieme A = insieme dei punti dello spazio la cui proiezione sul piano xy cade in Ω e la cui quota è compresa tra il grafico di $\varphi(x, y)$ e quello di $\psi(x, y)$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

$$3 = 2 + 1$$

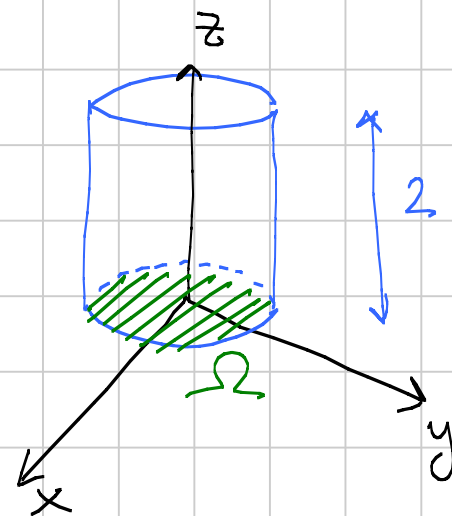
Formula di integrazione PER COLONNE

Esempio 1 $A =$ cilindro con asse lungo asse z , raggio 1 e altezza $[0, 2]$.

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 2 \}$$

↑ ↑ ↑
base $\varphi(x,y)$ $\psi(x,y)$



$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^2 dz \, (z)$$

↑
COLONNE

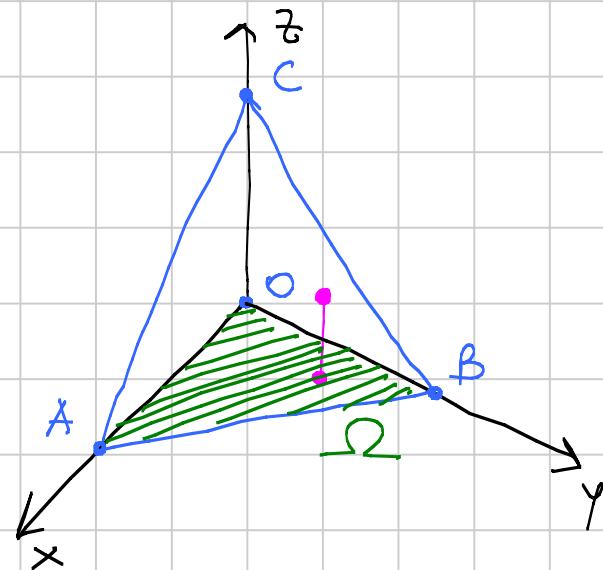
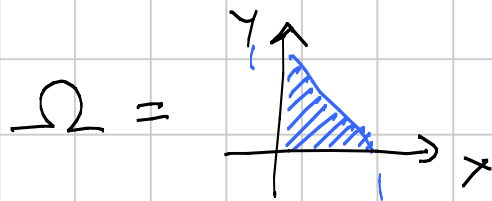
$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \iint_{\Omega} dx \, dy$$

$$= 2 \, \text{Area}(\Omega) = \boxed{2\pi}$$

Esempio 2

$A =$ piramide con vertici
 O, A, B, C

A è normale rispetto piano xy



$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 1 - x - y \}$$

↑
 $\varphi(x, y)$

↑
 $\psi(x, y) = \text{eq. del piano per } A, B, C$

L'eq. di un piano è $ax + by + cz = d$. Deve passare per

$$A = (1, 0, 0)$$

$$B = (0, 1, 0)$$

$$C = (0, 0, 1)$$

Si imposta il sistema e si vede che una poss. è

$$x + y + z = 1$$

$$\Rightarrow$$

$$z = 1 - x - y$$

eq. piano

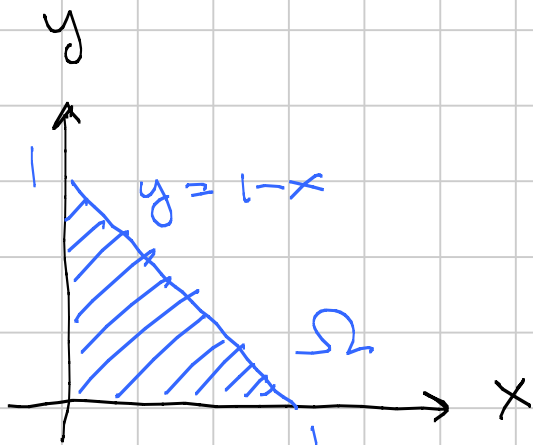
$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COLONNE}}}{\iiint_{\Omega}} dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \quad (x)$$

$$= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \iint_{\Omega} x (1 - x - y) \, dx \, dy$$

Diff. estremi
 $= 1 - x - y$

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \\ 0 \leq y \leq 1 - x \}$$



$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, x (1 - x - y) = \dots \text{ si calcola}$$

Descrizione per sezioni di un insieme

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], \quad (x, y) \in S_z \}$$

min.
QUOTA

max
QUOTA

Figura PIANA che
descrive la sezione
di A ad altezza z.

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx dy f(x, y, z)$$

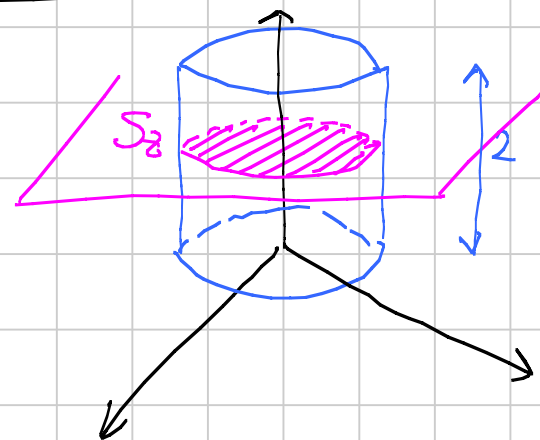
$$3 = 1 + 2$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SEZIONI

Esempio 1 $A =$ il cilindro di prima

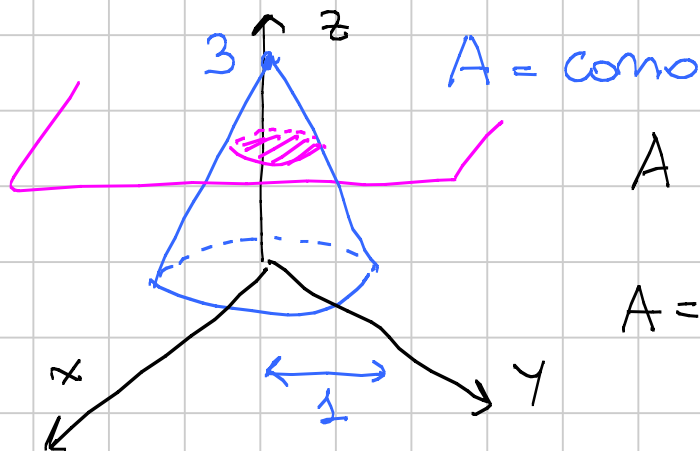
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 2], \quad (x, y) \in S_z \}$$

cerchio con centro
(0,0) e raggio 1



$$\begin{aligned}
 \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (\text{SEZIONI}) \\
 &= \int_0^2 z \, dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\
 &= \int_0^2 z \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\text{sempre } \pi} \, dz = \pi \int_0^2 z \, dz \\
 &= \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = \boxed{2\pi}
 \end{aligned}$$

Esempio 2



$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

A è normale rispetto al piano xy

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$

$\uparrow$
base
 $\uparrow$
eq. cono

Per sezioni: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 3], (x, y) \in S_z\}$

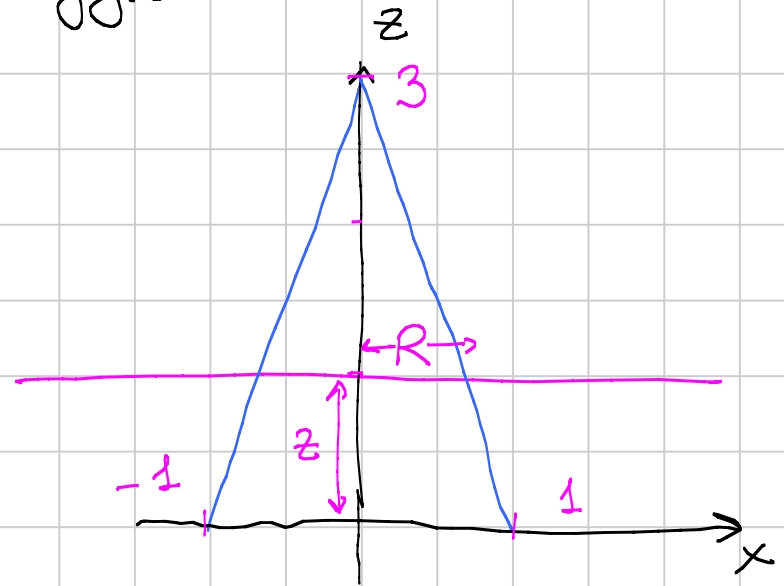
S_z = cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio?

Quale legame c'è fra R e z ?

Si può fare la proporzione:

$$R : 1 = (3 - z) : 3$$

$$R = \frac{3 - z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$



$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad z^2 = \int_0^3 z^2 dz \iint_{S_z} dx dy \\ &= \int_0^3 z^2 \text{Area}(S_z) dz = \int_0^3 z^2 \cdot \pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz = \pi \int_0^3 z^2 \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz = \dots \end{aligned}$$