

Integrali tripli

- ↗ Notazione
- Significato geometrico (fisico)
- Definizione
- ↘ Tecniche di calcolo
 - $3 = 1+1+1$, $3 = 2+1$, $3 = 1+2$
 - Cambi di coordinate

NOTAZIONE

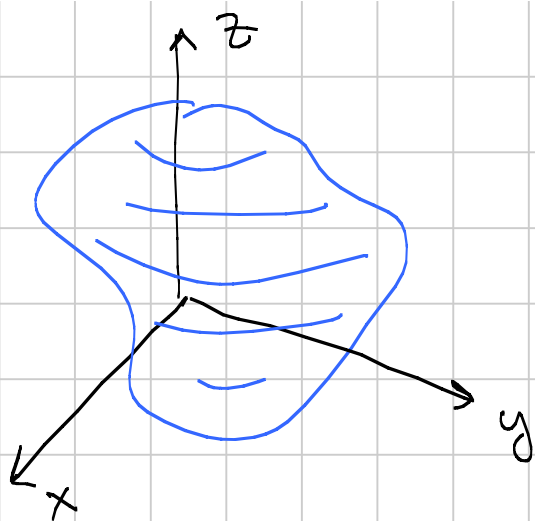
$A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato (zona di integrazione)
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata (integrand)

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Delicato perché grafico
 di f è contenuto in $\mathbb{R}^4$.



$A = \text{solido contenuto in } \mathbb{R}^3$

$f(x, y, z) > 0$ in A . Pensiamo che f rappresenti la densità del materiale di cui è composto A .

Supponiamo di voler calcolare il peso di A .

Il calcolo è semplice se A è un solido "semplice" ad esempio un parallelepipedo e la densità è costante.



Peso = Volume · peso specifico
(densità)

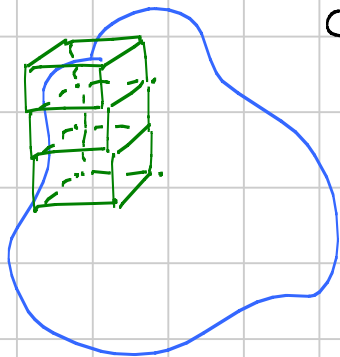
↑
facile per
il parallele-
pipedo

↑
costante

Caso semi-facile : il corpo è costituito da tanti mattoni a forma di parallelepipedo, diversi gli uni dagli altri, ma ciascuno omogeneo.

Peso totale = $\sum$ peso dei singoli mattoni
 $\uparrow$
si calcolano come prima.

Generale : si può ottenere una stima dall'alto del peso del corpo immaginandolo suddiviso in tanti "sottocorpi" a forma di parallelepipedo e supponendo la densità costante in ciascun mattone.



Allo stesso modo si ottiene una stima dal basso.

Si può immaginare che usando una suddivisione abbastanza fitta otteniamo una buona stima del peso.

QUESTA È IN FONDO LA DEF. DI INTEGRALE TRIPLO

DEFINIZIONE

- * Caso banale: 1 mattone
- * Caso semi-banale: tanti mattoni (diversi per dim. e densità)
- * Caso generale: si definisce l'integrale superiore e inferiore "approssimando" con un numero finito di mattoni.

— o — o —

TECNICHE DI CALCOLO: Formule di riduzione

$$A = \text{parallelepipedo} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

x y z

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

Di questa formula ci sono 6 versioni (3 possibili scelte per la variabile + interna, 2 possibili scelte per quella "intermedia")

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$ $f(x, y, z) = z + xy$

$$\iiint_A (z + xy) dx dy dz = \iiint_A z dx dy dz + \iiint_A xy dx dy dz$$

$$\iiint_A xy dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_1^2 dz (xy) = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy \int_1^2 1 dz$$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

lungh.
zona int
= 2-1=1

$$\begin{aligned}
 \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_1^2 dz \, (z) \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 1 \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{primitiva} \\ \text{risp. a } z \end{array} \\
 &= \frac{3}{2} \text{Area}([0,1] \times [0,1]) \\
 &= \boxed{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

In conclusione $\iiint_A (z + xy) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$

Esempio 2 $A = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$

$$\iiint_A \arctan(xyz) \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^3 dz \arctan(xyz)$$

così non si vede molto...

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 dy \int_{-1}^1 dx \arctan(xyz) = 0$$

come funzione della x è come se fosse $\arctan(kx)$, dunque è una funzione dispari, e integrata su $[-1, 1]$.

Dunque l'integrale in dx viene 0.

Esempio 3 $A = [-1, 1] \times [0, 2] \times [3, 4]$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$$

= 0

$$\iiint_A e^y \, dx \, dy \, dz$$

> 0

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

> 0

$$\iiint_A e^y dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz \int_0^2 dy (e^y)$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz [e^y]_{y=0}^{y=2}$$

$$= (e^2 - 1) \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz$$

$$= (e^2 - 1) \cdot \text{Area}([-1, 1] \times [3, 4]) = 2(e^2 - 1)$$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy \int_3^4 dz z^2 = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=3}^{z=4}$$

$$= \frac{64-27}{3} \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy = \frac{37}{3} \cdot 4,$$