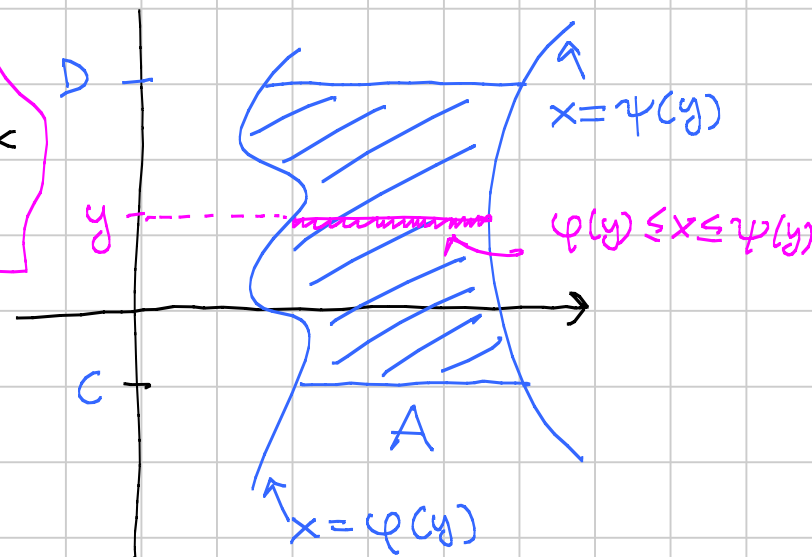


INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE y

Si presentano nella forma

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$



Esempio 1

È normale rispetto
asse y ?

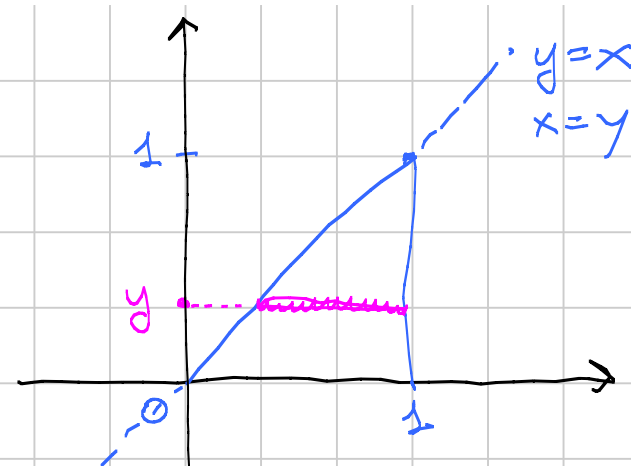
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{y \in [0, 1]}, \underbrace{y \leq x \leq 1} \}$$

$$\iint_A x y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \, (x y)$$

$$= \int_0^1 y \, dy \int_y^1 x \, dx = \int_0^1 y \, dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y (1 - y^2) \, dy =$$

controllare che
venga come prima.



Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

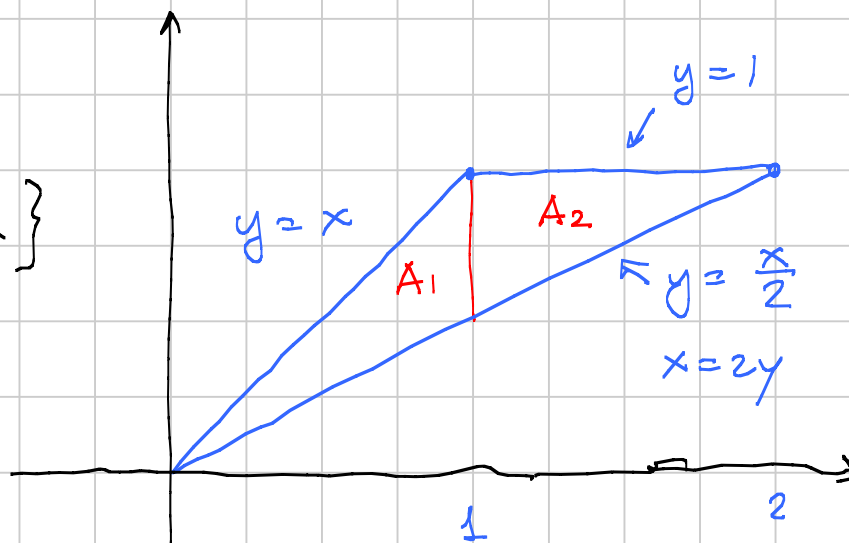
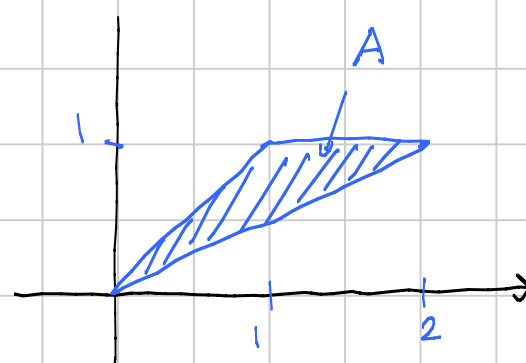
Ragioniamo rispetto asse x

$$= \iint_{A_1} y \, dx \, dy + \iint_{A_2} y \, dx \, dy =$$

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \frac{x}{2} \leq y \leq x \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \, y + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy \, y = \dots$$



Ragioniamo rispetto asse y

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \quad y \leq x \leq 2y \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \cdot y = \int_0^1 y \, dy \int_y^{2y} 1 \cdot dx$$

Parentesi generale:

$$\int_a^b 1 \, dx = b - a \\ = \text{lungh. interv.}$$

$$= \int_0^1 y (2y - y) \, dy = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}$$

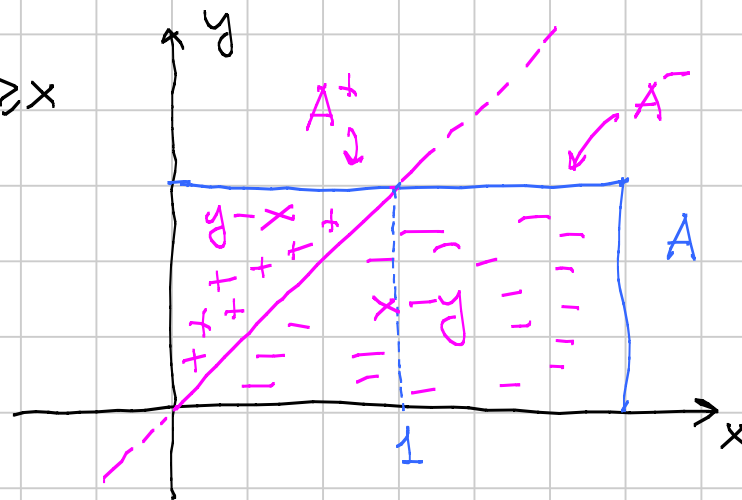
controllare che
venga lo stesso

Esempio 3

$$A = [0, 2] \times [0, 1]$$

$$f(x, y) = |y - x|$$

$$|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{dove } y - x \geq 0, \text{ cioè } y \geq x \\ x - y & \text{dove } y - x \leq 0 \end{cases}$$



$$\iint_A |y - x| \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{A^+} (y - x) \, dx \, dy + \iint_{A^-} (x - y) \, dx \, dy =$$

$$A^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x \leq y \leq 1 \} \quad \text{NORMALE ASSE } x$$

$$A^- = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 2 \} \quad \text{NORMALE ASSE } y$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) + \int_0^1 dy \int_y^2 dx (x-y) = \dots$$

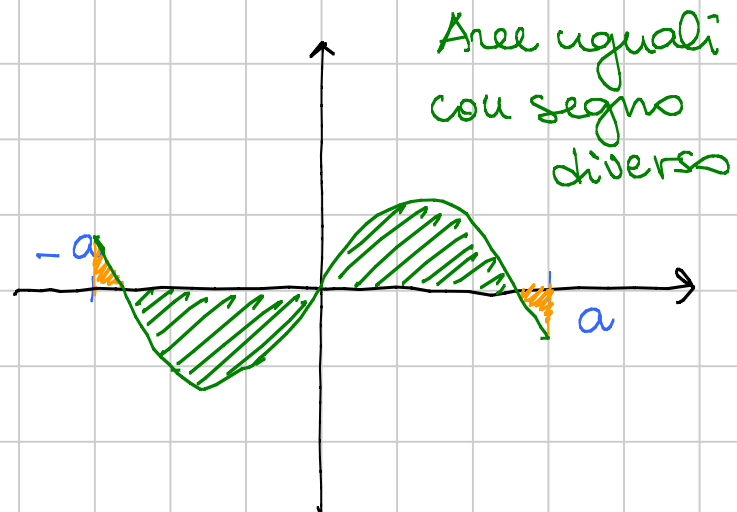
SIMMETRIE (= calcoli risparmiati)

Caso classico in 1 variabile. Sia $f(x)$ una funzione
DISPARI

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

↓
fane cambio di
variabile $y = -x$



Se invece $f(x)$ è PARI

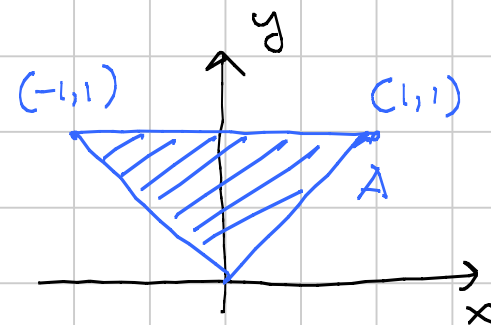
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

IMPORTANTE È LA SIMMETRIA DELL'INTERVALLO.

Esempio 1

$$\iint_A x \, dx \, dy = 0$$

x è positiva nel triangolo destro
 x è neg. " " sinistro



I 2 volumi si compensano

Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

di sicuro è positivo perché $y > 0$
all'interno di tutto il ∇

$$= 2 \iint_{\nabla} y \, dx \, dy \quad \text{sempre per simmetria}$$

Esempio 3 $\iint_A |x| \, dx \, dy$ di sicuro è positivo ($|x| \geq 0$ dentro)

$$= 2 \int x \, dx \, dy$$

Esempio 4

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

||
○

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

||
○

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

> 0 perché
 $xy \geq 0$ nel I e
III quadrante.

