

ANALISI II

CIV
NUC.

ORA 27

TECNICHE DI CALCOLO

Gli integrali doppi si calcolano
mediante le FORMULE DI RIDUZIONE

FORMULA DI RIDUZIONE
SUI RETTANGOLI

1 int. doppio = 2 int.
in una var.

Supponiamo che A sia un rettangolo con lati paralleli
agli assi $A = [a, b] \times [c, d]$
 $f(x, y)$ funzione limitata qualsiasi

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,2]$ $f(x,y) = x+2y$

$$\iint_A (x+2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x+2y) dy$$

↓ calcolo questo integrale risp. alla
variabile y facendo finta che x
sia una costante (parametro)

$$= \int_0^1 dx \left[\underbrace{xy + y^2}_{\substack{\text{primitiva di} \\ x+2y \text{ rispetto} \\ \text{alla variabile } y}} \right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= \int_0^1 dx [2x+4] = \text{da qui in poi è un integrale della sola } x$$

$$= \left[\underbrace{x^2 + 4x}_{\substack{\text{primitiva di} \\ 2x+4 \text{ rispetto} \\ \text{alla variabile } x}} \right]_{x=0}^{x=1} = 1+4 = \boxed{5}$$

La formula di riduzione si può anche scrivere nella forma

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

primitiva di $x+2y$
rispetto ad x

$$\iint_A (x+2y) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^1 (x+2y) dx = \int_0^2 dy \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \int_0^2 dy \left[\frac{1}{2} + 2y \right] = \left[\frac{y}{2} + y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{2} + 4 = \boxed{5}$$

Esempio 2 $A = [1, 2] \times [2, 3]$ $f(x, y) = xy^2$

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_1^2 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_1^2 dx \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3} = \int_1^2 dx \left[9x - \frac{8}{3}x \right] =$$

$$= \int_1^2 \frac{19}{3} x dx = \left[\frac{19}{6} x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \dots$$

↑
primitiva
risp. a y

In alternativa

$$\begin{aligned}\iint_A xy^2 dx dy &= \int_2^3 dy \int_1^2 xy^2 dx = \int_2^3 dy \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \\ &= \int_2^3 dy \left[\underset{\substack{\uparrow \\ x=2}}{2y^2} - \underset{\substack{\uparrow \\ x=1}}{\frac{1}{2}y^2} \right] = \int_2^3 \frac{3}{2} y^2 dy = \left[\frac{y^3}{2} \right]_{y=2}^{y=3} = \dots\end{aligned}$$

prim. su x
↓
controlla
che coincide
↑

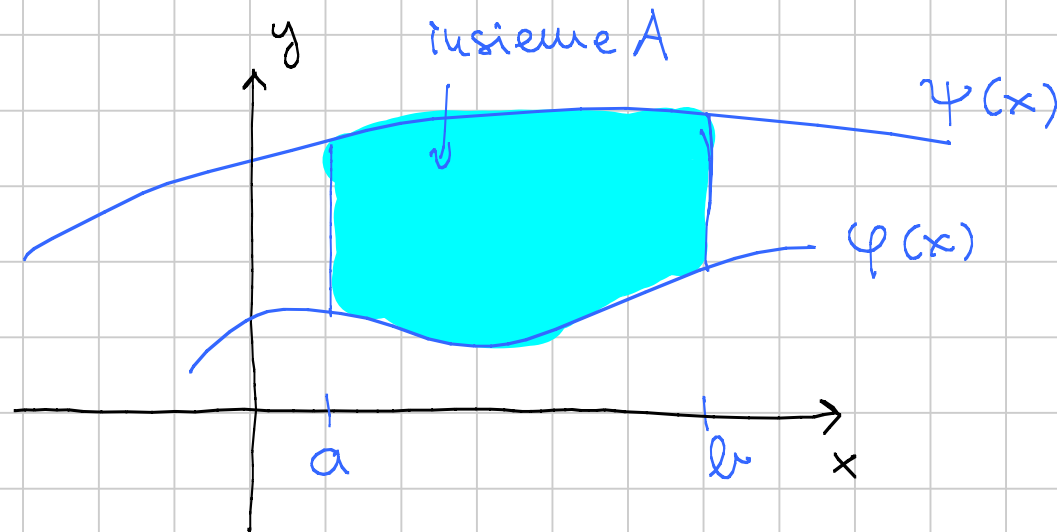
$$\begin{aligned}\iint_A xy^2 dx dy &= \int_2^3 dy \int_1^2 xy^2 dx = \int_2^3 y^2 dy \int_1^2 x dx = \\ &= \int_2^3 y^2 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} = \\ &= \int_2^3 y^2 dy \left[2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{2} \int_2^3 y^2 dy\end{aligned}$$

è una costante
quando integro
risp. a x , quindi
può uscire

INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE x

È un insieme del tipo:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$



Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

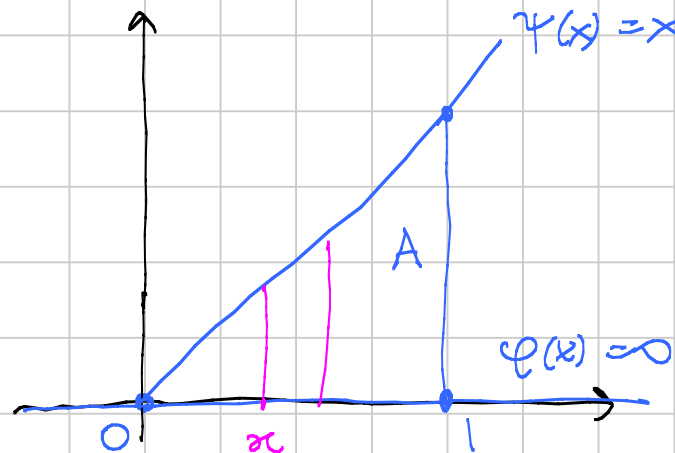
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Esempio 1 $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (1,1)$

$$f(x,y) = xy$$

L'insieme A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x \in [0,1]}_{\downarrow}; \underbrace{0 \leq y \leq x}_{\swarrow} \}$$



$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^x y \, dy =$$

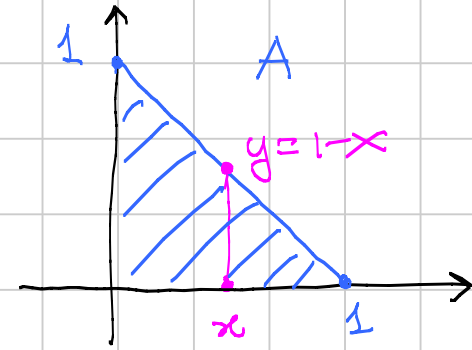
$$= \int_0^1 x \, dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, dx$$

↑
primitiva
di y risp. a y

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Esempio 2 $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (0,1)$
 $f(x,y) = x^2y$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x \}$$



$$\iint_A x^2y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x^2y)$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y \, dy = \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x}$$

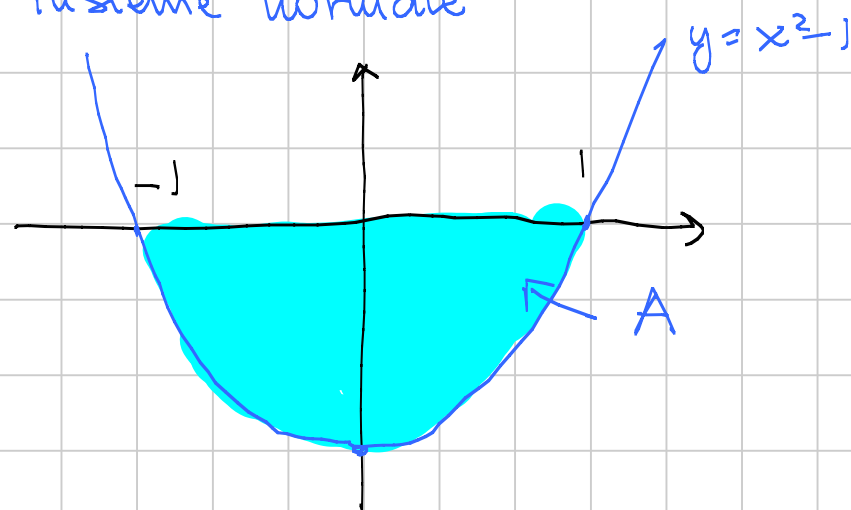
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = \dots$$

Esempio 3 $f(x,y) = x$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1+x^2 \leq y \leq 0 \}$$

Non è una scritt. come
insieme normale

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], \\ -1+x^2 \leq y \leq 0 \}$$



$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^0 x \, dy$$

$$= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{x^2-1}^0 1 \, dy = \int_{-1}^1 x \, dx [y]_{y=x^2-1}^{y=0}$$

$$= \int_{-1}^1 x [0 - (x^2 - 1)] \, dx = \int_{-1}^1 x(1 - x^2) \, dx = 0$$

funzione
disponi su
intervallo
[-A, A].