

INTEGRALI IN PIÙ VARIABILI (2 variabili)

1. Come si indicano (notazione)
2. Significato geometrico
3. Come si definiscono (definirebbero)
4. Come si calcolano

1. Notazione Ingredienti base:

* un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **LIMITATO** (zona di integrazione)

* una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA (integranda)

cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$-M \leq f(x, y) \leq M \text{ per ogni } (x, y) \in A$$

L' integrale di $f(x,y)$ in A si invoca

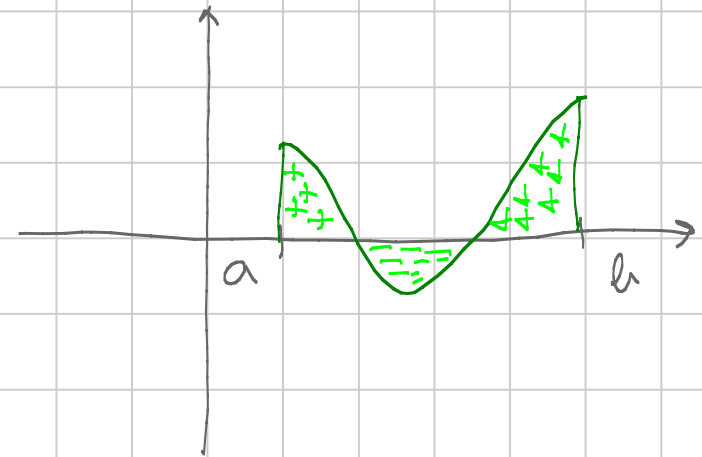
$\iint_A f(x,y) dx dy$
 ← integrale doppio
 ← zona
 ← integranda
 ← variabili di integrazione
 $\int f(x,y) dx dy$

$$\int_A f(x,y) dx dy \quad \text{STESSO SIGNIFICATO}$$

2 SIGNIFICATO GEOMETRICO

In 1 variabile

$\int_a^b f(x) dx =$ "area con segno della parte di piano compresa tra il grafico e l'asse x"



= somma aree zone + meno area zone -

In 2 variabili: $\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume con segno della parte di spazio compresa tra il grafico ed il piano base xy .

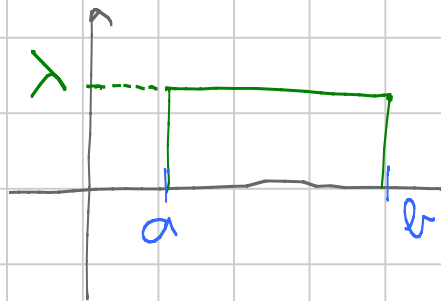
i volumi delle zone dove $f \geq 0$ contano con il segno +,
i volumi dove $f \leq 0$ con il segno -.

3 DEFINIZIONE (IDEA)

1 variabile: come si definisce $\int_a^b f(x) dx$?

CASO BANALE

$f(x)$ è uguale ad una costante λ per ogni $x \in [a, b]$

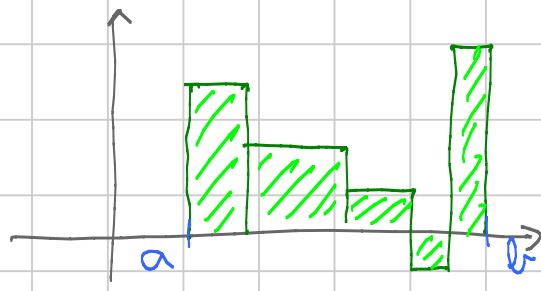


$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno del rettangolo} \\ = (b-a) \lambda$$

FUNZIONE A GRADINI - STEP FUNCTION

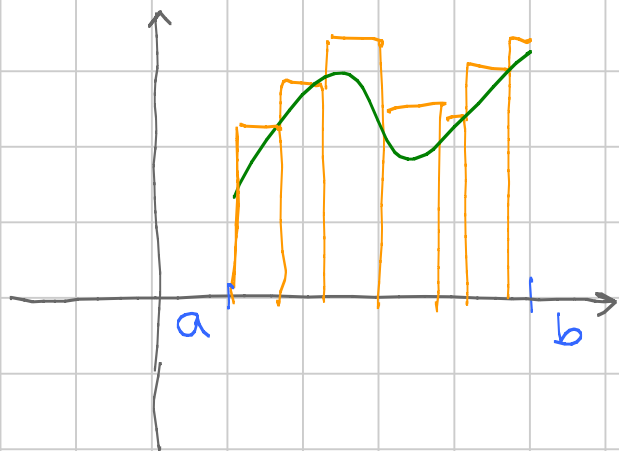
CASO SEMIBANALE

$f(x)$ è costante a tratti in $[a, b]$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree} \\ \text{con segno dei vari rettangoli}$$

CASO GENERALE



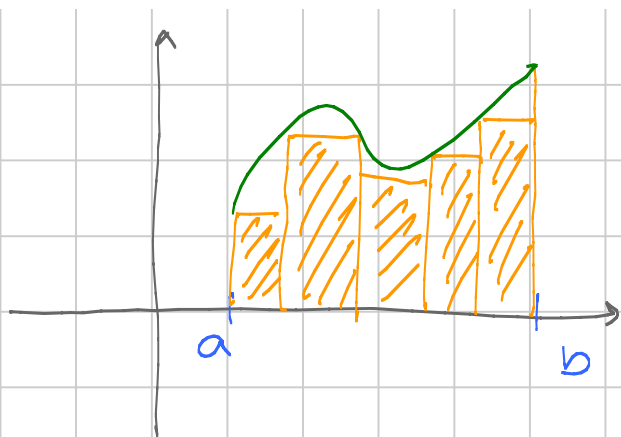
$f(x)$ è una qualunque funzione limitata

Si definiscono l'integrale superiore
 $I^+(f; [a, b])$ e l'integrale inferiore

$I^-(f; [a, b])$ nel seguente modo

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una qualunque funzione} \right. \\ \left. \text{a gradini } \geq f(x) \text{ in } [a, b] \right\}$$

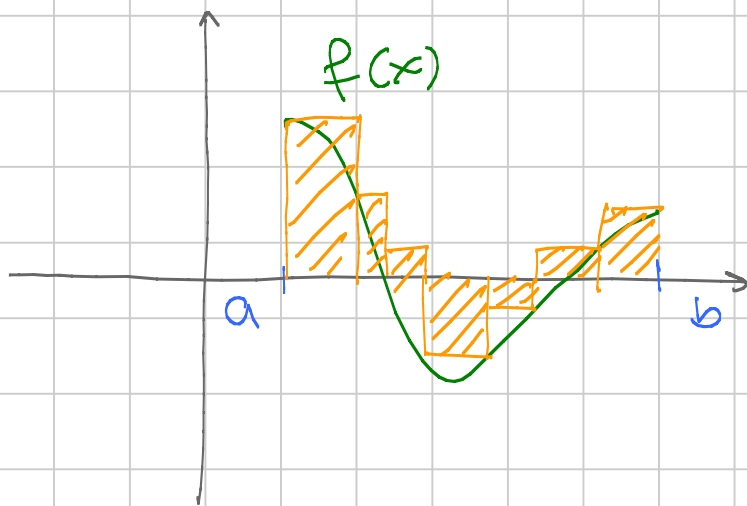
$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradini e } \leq f(x) \right. \\ \left. \text{in } [a, b] \right\}$$



Che relazione c'è fra I^+ e I^- ?

In generale $I^+ \geq I^-$.

Se accade che $I^+ = I^-$ si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ (secondo RIEMANN) e il valore comune si dice integrale.

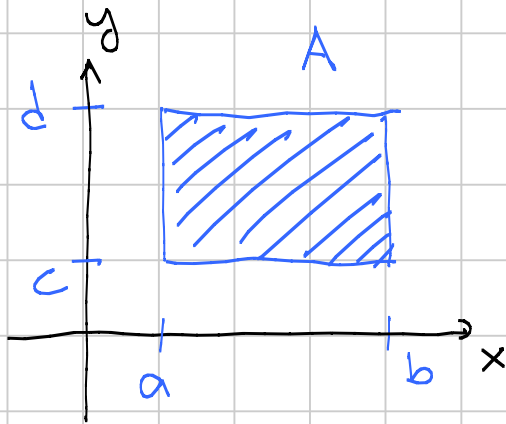


funzione a gradino $\geq f(x)$

In 2 variabili

CASO BANALE

$A =$ rettangolo con lati paralleli agli assi
 $= [a, b] \times [c, d]$



$f(x, y) =$ costante λ su tutto il rettangolo.

$\iint_A f(x, y) dx dy =$ volume con segno del
parallelepipedo

altezza
con segno

$$= \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{Area base (sempre } > 0)}$$

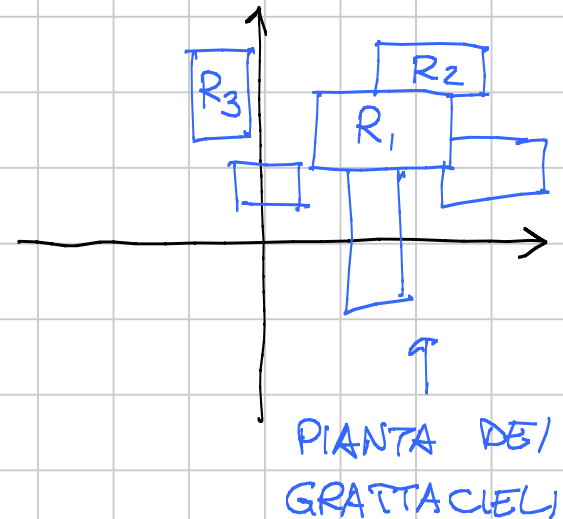
CASO SEMIBANALE

Funzioni semplici
Funzioni a gradino
Step functions

} SINONIMI
(sistema di
grattacieli)

Insieme A = unione finita di rettangoli
con lati paralleli agli assi
 $R_1, \dots, R_k$

$f(x, y) =$ costante λ_i su ogni rettangolo
 R_i



$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \text{somma algebrica dei volumi dei singoli parallelep.}$$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Area}(R_i) = \text{volume con segno dei grattacieli}$$

CASO GENERALE

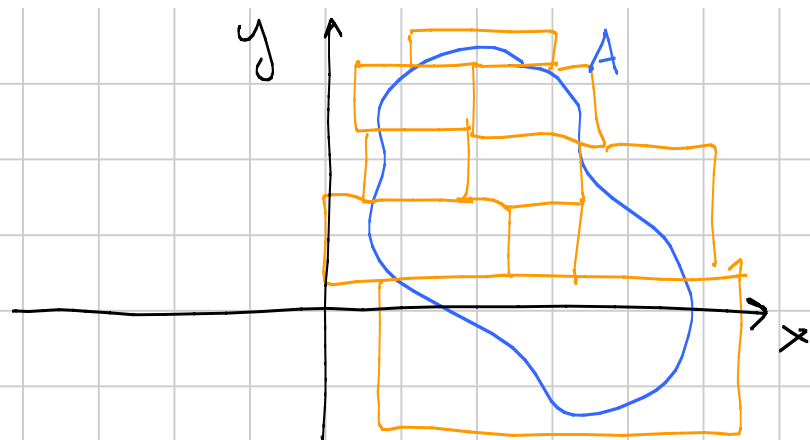
A insieme limitato qualunque
 f funzione limitata qualunque.

$$I^+(f; A) = \inf \left\{ \iint_{\boxed{?}} \varphi(x, y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi(x, y) \text{ è una qualunque} \\ \text{funzione a gradienti b.c.} \\ \varphi(x, y) \geq f(x, y) \text{ in } A \end{array} \right\}$$

↑
dove φ è definita

$$I^-(f; A) = \sup \left\{ \text{-----} : \varphi(x, y) \text{ ---- } \varphi(x, y) \leq f(x, y) \text{ in } A \right\}$$

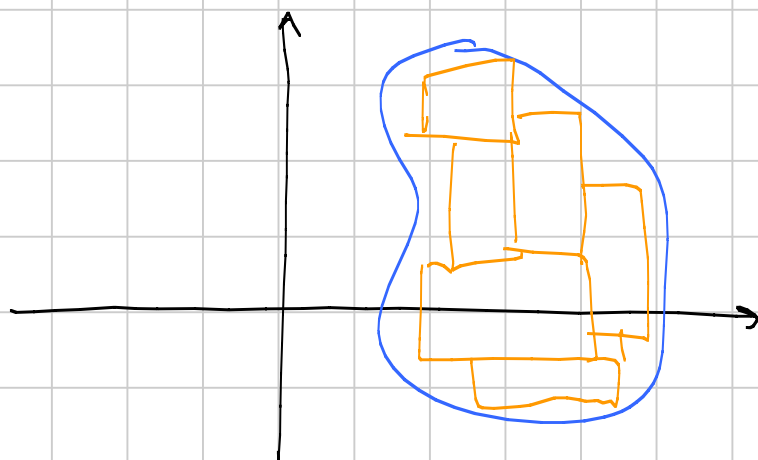
In generale $I^+ \geq I^-$. Se accade che $I^+ = I^-$, si dice che f è integrabile ed il valore comune si dice integrale di f in A .



$$f(x,y) > 0 \text{ in } A$$

In più variabili oltre allo
"sforamento in altezza"
c'è anche uno "sforamento
sulla base"

↑
insieme di definitiz.
di una $\varphi(x,y)$ a gradienti $\geq f(x,y)$ in A



✓ insieme def.
di $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ in A