

ANALISI 2 CIV.

ORA23

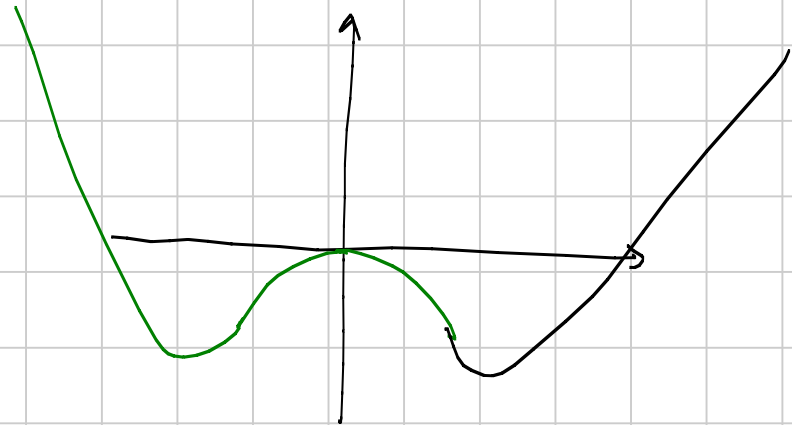
Occhio all'intuizione!

In una variabile:

max loc. nell'origine

$\sup = +\infty$

$\Rightarrow$ min. locali
e zone di convessità



In più variabili è falso

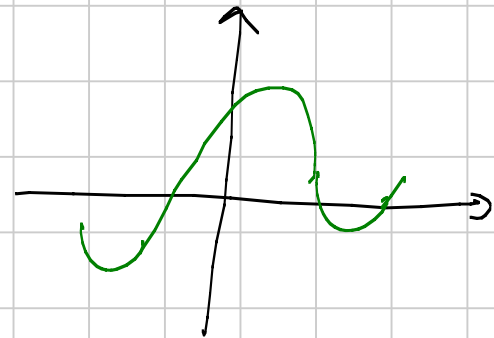
— o — o —

HARD

In una variabile, se ci sono

2 p.ti di min. loc, per forza in

mezzo c'è un p.to di max loc.



In 2 variabili esiste una funzione $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con tutte le derivate di ogni ordine che ha solo 2 p.ti stazionari, i quali sono entrambi min locali.

TROVARE L'ESEMPIO È DIFFICILE.

Esempio $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2$

$$\sup \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty \quad (x=0, y \text{ enorme})$$

minimo esiste perché $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$\underbrace{x^4 + y^4 - x^2}_{\downarrow +\infty} = \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \rho^2 \cos^2 \theta \geq \boxed{m \rho^4 - \rho^2} \quad \downarrow +\infty$$

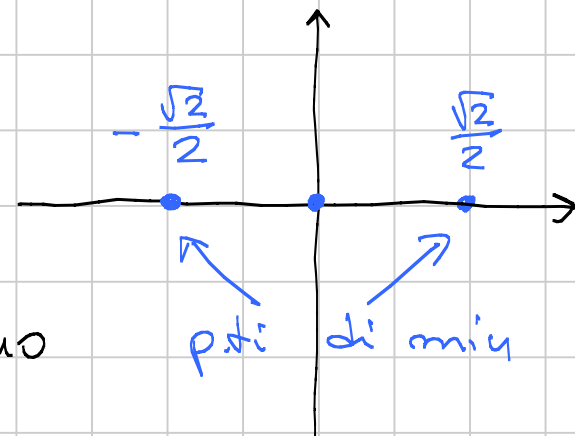
Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ 4y^3 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$
 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 p.ti stazionari

Basta sostituire per vedere quale/i sono
i p.ti di max / min



$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\min \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = -\frac{1}{4} \quad \text{p.ti di min } (x,y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$(0,0)$ che p.to staz. è?

Taylor: $f(x,y) \sim -x^2 + o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow$ si comporta come $-x^2 \Rightarrow (0,0)$ max. loc.

NO!!!!

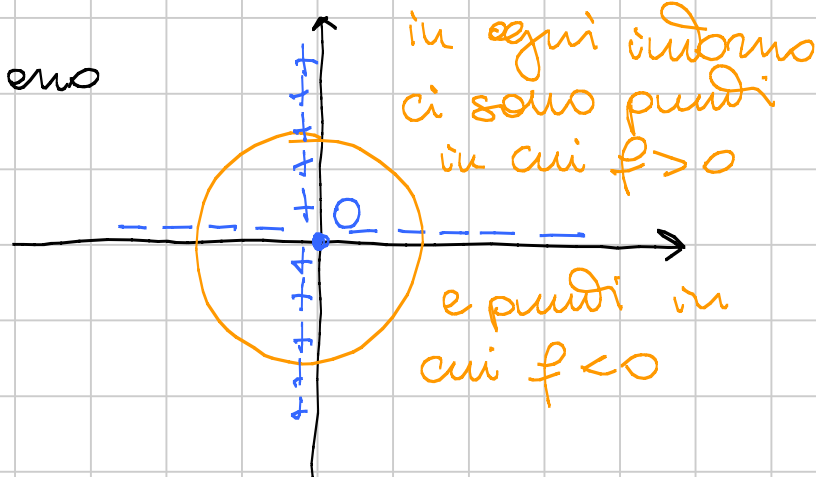
"Si comporta come" vuol dire che in $(0,0)$ hanno la stessa matrice Hessiana, quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = 0 \Rightarrow \text{BOH} \\ \rightarrow \text{semidef. neg.}$$

$\Rightarrow$ l' $Hf(0,0)$ non permette di concludere quale tipo di

p.to staz. è $(0,0)$, o per lo meno permette solo di dire che non si tratta di min/loc.

$f(x,0) = x^4 - x^2$, che come



funzione di 1 var. ha un max locale nell'origine, quindi vicino a $x=0$ è negativa

$\Rightarrow (0,0)$ non è né max, né min locale.

— o — o —

Esempio $f(x,y) = y^2 + \cos x$. L'origine è staz.?
Di che tipo?

$$f(x,y) = y^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2+y^2) \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

Non ci sono termini di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ p.to staz.

$$Hf(0,0) \text{ è come quella di } y^2 - \frac{x^2}{2} \quad Hf = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ p.to di sella.

Se fosse $f(x,y) = y^4 + \cos x^4$. L'origine è staz.?
Di che tipo?

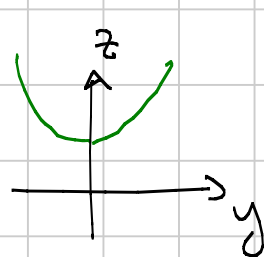
$$f(x,y) = y^4 + 1 - \frac{x^8}{2} + o\left((\sqrt{x^2+y^2})^{15}\right)$$
$$= 1 + o(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow$ no termini di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ p.to staz.

no termini di 2° grado $\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH

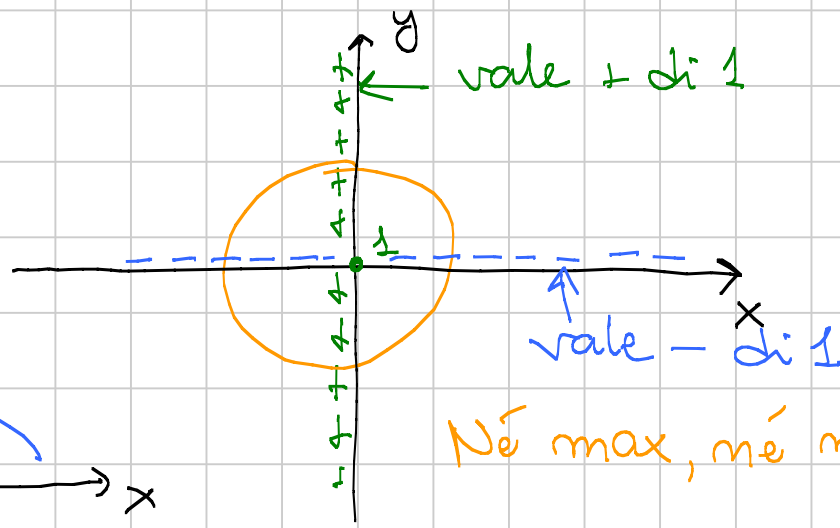
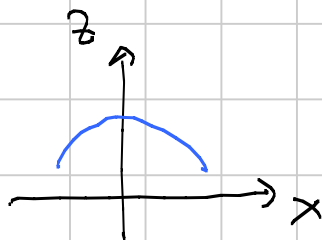
Lungo asse y

$$f(0,y) = y^4 + 1$$



Lungo asse x

$$f(x,0) = \cos x^4$$



Né max, né min.

Calcolare $\max_{\min} \{ |y^4 + \cos x^2| ; x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \}$

Inizio studiamo il problema senza val. assoluto

$$\max \{ y^4 + \cos x^2 : x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \} = 2$$

$$y^4 + \cos x^2 \leq 1 + 1 = 2$$

p.ti di max sono tutti
i p.ti in cui $y = \pm 1$ e
 $\cos x = 1$

$$y^4 + \cos x^2 \geq 0 - 1 = -1$$

p.ti di min sono tutti i
p.ti in cui $y = 0$ e $\cos x = -1$

Senza val. assoluto

$$\max = 2$$

$$\min = -1$$

Quindi con il val. assd.

$$\max = 2$$

$$\min = 0$$

p.ti di max: i precedenti.

p.ti di min: tutti i punti in cui $y^4 + \cos x^2 = 0$

$$\max \min \left\{ e^{\arctan |y^4 + \cos x^2|^3} : x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \right\}$$

si ottiene dal precedente
componendo con la funzione

$$e^{\arctan t^3}$$

↑
Funzione crescente

$$t = |y^4 + \cos x^2| \leftarrow \text{funzione di prima}$$

Se voglio $e^{\arctan t^3}$ grande, devo usare il t + grande
che posso
piccolo + piccolo

$\Rightarrow$ i p.ti di max e min sono gli stessi di prima.