

ANALISI II CIV

ORA 22

Esempio $f(x, y) = x^2 y^2 - x^4 - y^4$

$$\inf \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = -\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

Ponendo $x^2 = z$, $y^2 = w$ diventa $zw - z^2 - w^2$. Lo studio del segno di questa è lo studio di una forma quadratica.

$$\begin{aligned} zw - z^2 - w^2 &= - \left(z^2 + w^2 - zw \right) = - \left(z^2 - 2z \cdot \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} + \frac{3w^2}{4} \right) \\ &= - \left(z - \frac{w}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} w^2 \end{aligned}$$

$$x^2 y^2 - x^4 - y^4 = - \left(x^2 - \frac{y^2}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} y^4 \leq 0 \quad \text{sempre}$$

$$e = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ e } x = 0$$

Conclusione $\max \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$
 $\sup = 0$

p.to di max: $(0,0)$

$$f_x = -4x^3 + 2xy^2$$

$$f_y = -4y^3 + 2yx^2$$

$$f_{xx} = -12x^2 + 2y^2, \quad f_{yy} = -12y^2 + 2x^2, \quad f_{xy} = 4xy$$

Quali sono i p.ti stat.?

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} -2x^3 + xy^2 = 0 \\ -2y^3 + yx^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x(y^2 - 2x^2) = 0 \\ y(x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

1^a eq. $\nearrow x=0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y=0 \rightarrow (0,0)$
 $\searrow \boxed{y^2 = 2x^2} \nearrow y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$
 $\searrow \boxed{x^2 = 2y^2}$

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x^2 \\ x^2 &= 2y^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = 2x^2 = 4y^2$$

$$y^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$\Rightarrow$ l'unico p.to stat. è $(0, 0)$

— 0 — 0 —

Esempio $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\inf \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = -\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

Metto $x=y \Rightarrow f(x, x) = x^4 - 2x^2$ x enorme

$$\Rightarrow \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$$

$$y^2 = 8y^4 \rightarrow y=0 \text{ già trovato}$$

$$\hookrightarrow 1 = 8y^2 \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$\downarrow$

$$x^2 = 2y^2 = \frac{1}{4}$$

NO

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Vicino a $(0,0)$ $f(x,y)$ si comporta come $-(x^2 + y^2) \Rightarrow$ max. loc.

Quali sono i p.ti staz.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2yx^2 - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{1^a \text{ eq.}} \begin{cases} \nearrow x = 0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y = 0 \rightarrow (0,0) \\ \searrow y = \pm 1 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} x = \pm 1 \rightarrow (\pm 1, \pm 1) \end{cases} \end{array} \quad \underline{4 \text{ poss.}}$$

Abbiamo 5 p.ti staz.

$$f_{xx} = 2y^2 - 2 \quad f_{yy} = 2x^2 - 2$$

$$f_{xy} = 4xy$$

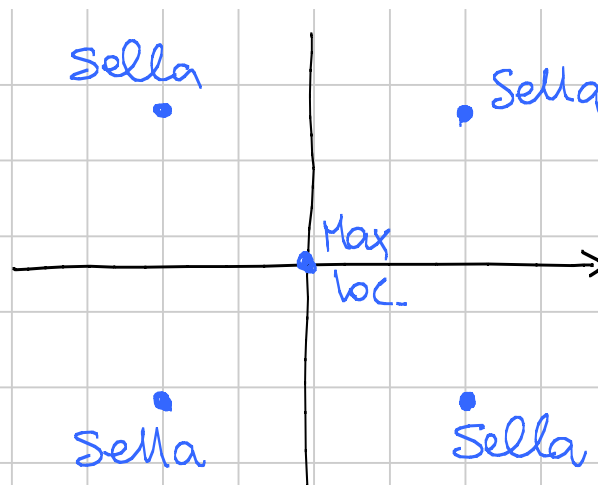
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Auto v: } -1, -1 \Rightarrow \text{def. neg.}$$

$\Downarrow$
 p.to max locale

$$Hf(1,1) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$



$$Hf(-1, -1) = Hf(1, 1)$$

$$Hf(1, -1) = 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

Zone di concavità e convessità:

$$\begin{aligned} \text{Det}[Hf(x, y)] &= (x^2 - 1)(y^2 - 1) - 4x^2y^2 \\ &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 - 4x^2y^2 \\ &= -x^2 - y^2 - 3x^2y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}[Hf(x, y)] = x^2 + y^2 - 2$$

Ci sono zone in cui sicuramente è concava? Sì, vicino al p.to di max locale. Infatti se (x,y) sono vicini a $(0,0)$ si ha $\text{Det} > 0, \text{Tr} < 0 \Rightarrow \text{autov: } -, - \Rightarrow \text{def. neg.}$

$\Downarrow$
concava
(semi)

Ci sono zone in cui è convessa? Deve essere Hf def. pos.
 $\Rightarrow \text{autov: } +, + \Rightarrow \text{Det} > 0, \text{Tr} > 0$

Se ci sono zone di convessità, ci sono per $x^2 + y^2 \geq 2$, cioè fuori dal cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

Ma in tali zone

$$-(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 + 1 \text{ è di sicuro neg. quindi}$$
$$\text{Det} < 0$$