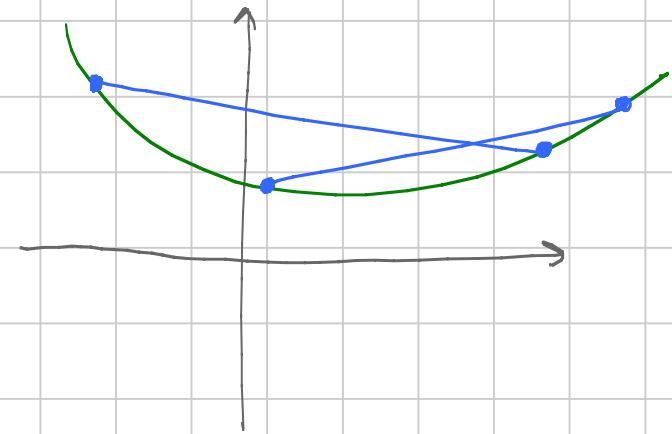


CONCAVITÀ e CONVESSITÀ in 2 o più variabili

In 1 variabile : una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti del grafico il segmento che li unisce sta tutto sopra il grafico.

Si dice concava se il segmento sta sotto.

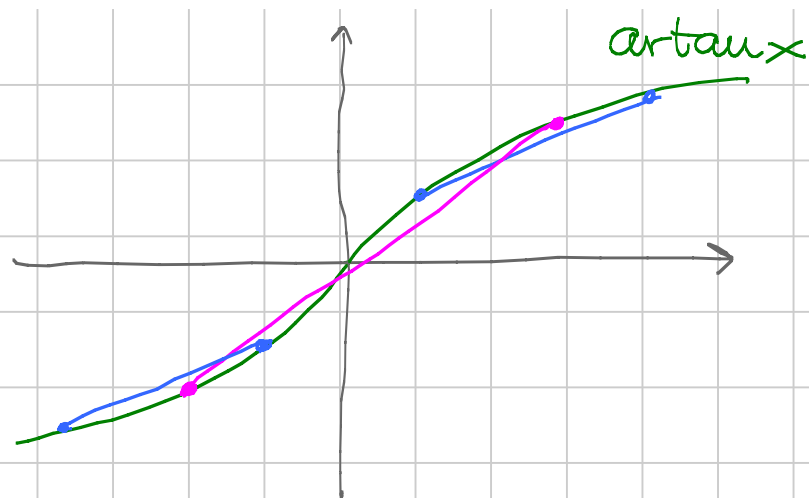
Stessa cosa se la funzione è definita solo su un intervallo o una semiretta.



Concava per $x \geq 0$

convessa per $x \leq 0$

Nè concava, nè convessa
su tutto $\mathbb{R}$



In 2 o più variabili è la stessa cosa. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è CONVESSA
se per ogni coppia di pti del grafico, il segmento che li
congiunge sta tutto sopra,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concava e
convessa contemp.



$$f(x) = ax + b \text{ (retta)}$$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ concava e conv.
contemp.



$$f(x,y) = ax + by + c \text{ (piano)}$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che esista f'' . Allora

$$f \text{ CONVESSA in } [a, b] \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

In 2 variabili

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} esistano.

Allora:

$$f \text{ convessa in } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow Hf(x, y) \text{ semidef. pos. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempio 1 $f(x, y) = x^4 + y^6$. $f_x = 4x^3$, $f_y = 6y^5$

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = 30y^4$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 30y^4 \end{pmatrix}$$

Matrice diago $\Rightarrow$ autov. = ciò che sta sulla diagonale
 $\Rightarrow$ autov. $\geq 0 \Rightarrow$ semidef. pos. $\Rightarrow$ CONVESSA
su tutto $\mathbb{R}^2$

Punti stat. ? Solo $(0,0)$. $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BDH

$(0,0)$ è in realtà p.to di min loc. (e anzi globale) perché
 $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ altrove.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

vale se $p \geq 1$ (sto
usando che $p^6 \geq p^4$)

In fatti

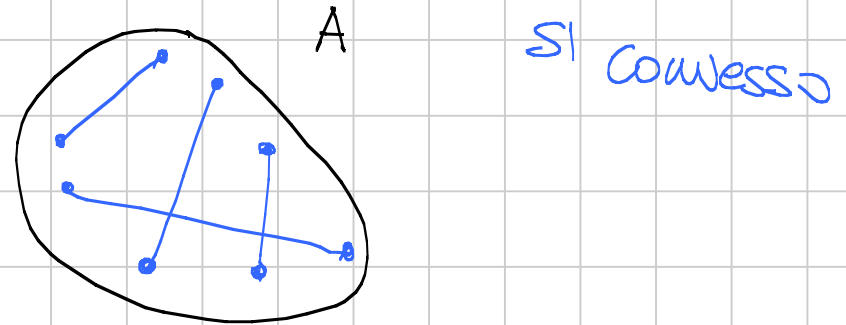
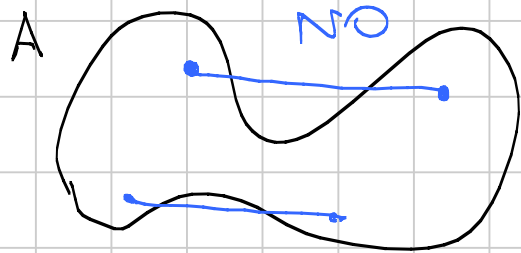
$$\underbrace{x^4 + y^6}_{\rightarrow +\infty} = p^4 \cos^4 \theta + p^6 \sin^6 \theta \geq p^4 (\cos^4 \theta + \sin^6 \theta) \geq \boxed{m p^4} \rightarrow +\infty$$

$$m = \min \{ \cos^4 \theta + \sin^6 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \} > 0$$

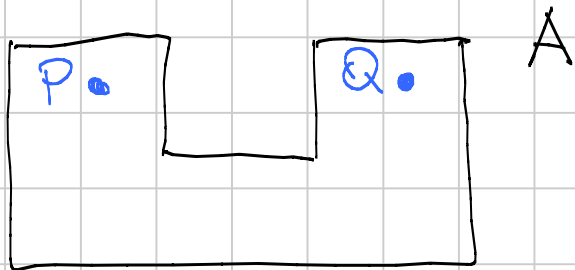
$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo Hf esista

f convessa in $A \iff Hf(x,y)$ semidef. pos. $\forall (x,y) \in A$

Tutto ciò vale purché l'insieme A sia a sua volta CONVESSO



Oss. Non ha senso parlare di funzione convessa definita su un insieme non convesso.



i punti del grafico che stanno sulla verticale di P e Q determinano un segmento che non può stare sopra/sotto il grafico

Differenza grossa fra 1 e 2 variabili

Esempio 2 $f(x, y) = xy$ $f_x = y$ $f_y = x$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 0$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autov: } +, -$$

$\Rightarrow$ non definita pos/neg

$\Rightarrow f(x, y)$ non è né CONCAVA né CONVESSA da nessuna parte

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 + y^4 + 3xy$

$$f_x = 4x^3 + 3y$$

$$f_y = 4y^3 + 3x$$

$$\sup \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

$$\max \{ \quad \quad \quad \} \text{ n.e.}$$

Esiste min? Sì, per il WEIERSTRASS esteso in quanto

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$x^4 + y^4 + 3xy = \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + 3\rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\geq m\rho^4 - 3\rho^2 \quad m > 0$$

$\downarrow$ $+\infty$

Il min viene assunto per $(x,y) = (0,0)$? NO

Infatti $f(x,y) = 3xy + o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow f(x, y)$ in $(0, 0)$ si comporta come xy , dunque ha una sella, dunque $(0, 0)$ non può essere tra i p.ti di m.m.

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{yy} = 12y^2$$

$$f_{xy} = 3$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3 \\ 3 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} < 0 \Rightarrow \text{sella (altro modo di vederlo)}$$

Per quali (x, y) la matrice è def. pos.?

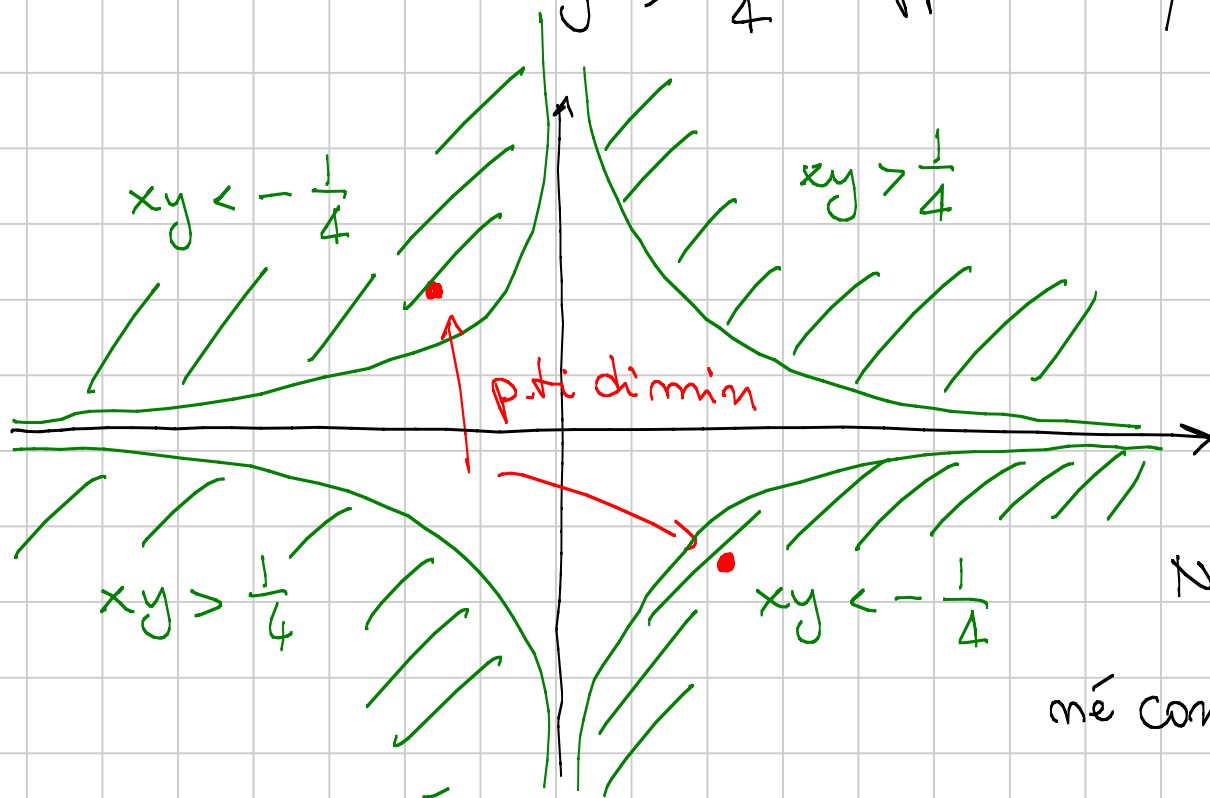
$$\text{Det} = 144x^2y^2 - 9$$

$$\text{Tr} = 12(x^2 + y^2) \geq 0$$

sempre

$$\text{Det} \geq 0 \Leftrightarrow 16x^2y^2 \geq 1, \quad x^2y^2 \geq \frac{1}{16},$$

$$\Leftrightarrow xy \geq \frac{1}{4} \text{ oppure } xy \leq -\frac{1}{4}$$



In ciascuna delle
4 zone

Det ≥ 0
Tr $\geq 0 \Rightarrow$ semidef.
pos.
 $\Downarrow$
CONVEXA

Nel resto Det < 0
 $\Downarrow$
né convessa, né concava

Per es.: calcolare i p.ti di min.

$$f(-x, -y) = f(x, y)$$