

# ANALISI 2 CIV

ORA 13

Titolo nota

25/10/2006

Studio locale per funzioni di 2 variabili (studio del comportamento vicino ad un p.to stazionario)

In 1 variabile :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$     $x_0 \in \mathbb{R}$     $f'(x_0) = 0$  (STAZ.)

$x_0$   $\nearrow$  p.to min loc. (rel.)   
 $x_0$   $\rightarrow$  p.to max loc. (rel.)   
 $x_0$   $\searrow$  p.to flesso a tg orizz.   
ancora peggio... 

Calcoliamo

$f''(x_0)$   $\nearrow$   $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  min rel.  
 $f''(x_0) \rightarrow$   $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$  max rel.  
 $f''(x_0) \searrow$   $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$  BOH (dipende)

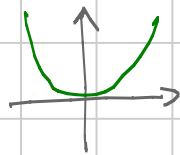
Se  $f''(x_0) = 0 \leadsto$  vedi derivate successive

**N.B.** Avere  $f''(x_0) > 0$  è condiz. SUFFICIENTE per avere min. loc. in  $x_0$

Non è necessaria  $\nearrow$  potrebbe  $f''(x_0)$  non esistere  
 $\searrow$  può esistere ed essere  $f''(x_0) = 0$

Esempio  $f(x) = x^4$   $x_0 = 0$   $f'(x) = 4x^3$ ,  $f''(x) = 12x^2$

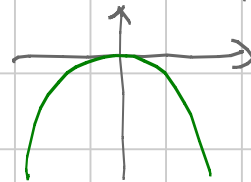
$x_0$  p.to min. rel.



$$f''(x_0) = 0$$

Analogamente  $g(x) = -x^4$   $f'(0) = f''(0) = 0$

$x_0 = 0$  p.to max. rel.



$x_0$  p.to min. loc.,  $f''(x_0)$  esiste  $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

$x_0$  " max " "  $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

In 2 variabili  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0)$  stazionario  $\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$

$(x_0, y_0)$   $\begin{cases} \nearrow \text{max. loc.} \\ \rightarrow \text{min. loc.} \\ \searrow \text{p.to sella o mountain pass.} \\ \downarrow \text{altro} \end{cases}$

Andiamo a vedere la "derivata seconda", cioè la matrice HESSIANA

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Guardiamo la SEGNAURA della matrice, cioè quanti autovalori sono  $> 0$ ,  $< 0$ ,  $= 0$ , cioè se la forma quadratica associata alla matrice è def. pos. / neg, --.

$(x_0, y_0)$  p.to min loc.  
 $Hf(x_0, y_0)$  esiste  $\Rightarrow$  Forma semi def. pos.  
 (autov.  $\geq 0$ )

$(x_0, y_0)$  p.to max loc.  
 $Hf(x_0, y_0)$  esiste  $\Rightarrow$  Forma semi def. neg.  
 (autov.  $\leq 0$ )

## CONDIZIONI SUFFICIENTI:

$Hf(x_0, y_0)$  def. pos.  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  p.to min loc.

" def. neg.  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  p.to max loc.

$Hf(x_0, y_0)$  con 1 autoval.  $> 0$   $\Rightarrow (x_0, y_0)$  p.to di SELLA  
e 1 autoval.  $< 0$

Se c'è un autovalore  $= 0$ , allora BOH



Det  $H = 0$

Esempio 1  $f(x, y) = x^2 + xy$   $\nabla f(0, 0) = 0$

$$f_x = 2x + y$$

$$f_y = x$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autov. : } +, -$$

$\Downarrow$   
 $(0,0)$  p.to di sella

Esempio 2  $f(x,y) = x^2 + e^{xy} + \cos y$

$$f_x = 2x + y e^{xy}$$

$$f_y = x e^{xy} - \sin y$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 + y^2 e^{xy} & e^{xy} + xy e^{xy} \\ e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} - \cos y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -3 \Rightarrow (0,0) \text{ p.to di sella}$$

SE il punto in considerazione è  $(0,0)$  si può dedurre  $Hf(0,0)$ , o per lo meno la forma ad esso associata, dallo sviluppo di TAYLOR

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} + \cos y$$
$$= x^2 + \underbrace{1+xy} + \underbrace{1 - \frac{y^2}{2}} + o(x^2+y^2)$$

Taylor di ordine  $n=2$

$$= \boxed{2} + \boxed{x^2 + xy - \frac{y^2}{2}}$$

$\uparrow$   
 $f(0,0)$

$\downarrow$   
 $\frac{1}{2!} \cdot$  Forma  
quadratica  
associata  
all' Hessiano

NON CI SONO (e non  
ci possono essere) termini  
di 1° grado perché  $(0,0)$   
è stazionario

$$x^2 + xy - \frac{y^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \boxed{2x^2 + 2xy - y^2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3  $f(x, y) = x^2 + y^4$   $(0, 0)$   $f_x = 2x$   
 $f_y = 4y^3$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma SEMI DEF. POS.  $\Rightarrow$  posso escludere max. rel., ma il resto NO.

In questo caso  $(0, 0)$  è p.to di min. loc. (e anzi GLOBALE)

In fatti  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(x, y) \geq 0$  SEMPRE

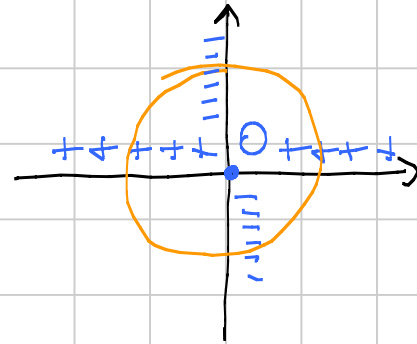
anzi  $f(x, y) > 0$  per ogni  $(x, y) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow$  p.to di min. stretto.

Esempio 4  $f(x,y) = x^2 - y^4 \dots Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

1 autov.  $= 0 \Rightarrow$  BOH

In ogni intorno di  $(0,0)$  ci sono p.ti in cui  $f > 0$  e p.ti in cui  $f < 0$



$\Downarrow$

$(0,0)$  non è nè max, nè min loc.

Esempio 5  $f(x,y) = x^3 + \sin^2(xy)$

Taylor ordine 2  $f(x,y) = 0(x^2 + y^2)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$  BOH  $\Rightarrow$  nè max nè min locale

