

ANALISI II

ORA 18

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 3\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

Quando $\cos \theta \neq 0$, domina $\rho^4 \cos^4 \theta$, dunque $f \rightarrow +\infty$

Quando $\cos \theta = 0$, resta solo $\rho^2 \sin^2 \theta$, poiché $\sin^2 \theta = 1$,
è come dire che resta solo ρ^2 , dunque $f \rightarrow +\infty$ anche
in questo caso

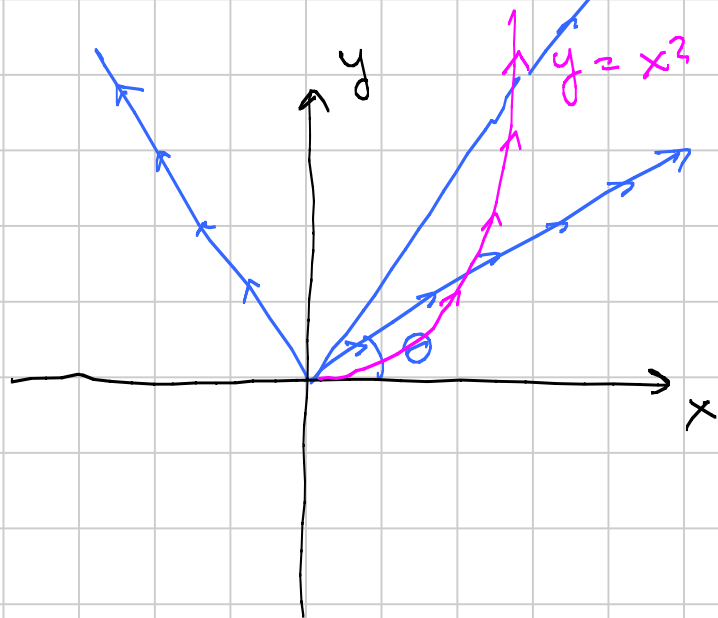
Quindi $f \rightarrow +\infty$

Se così fosse, il minimo esisterebbe. Dico che $\inf f = -\infty$
(su tutto $\mathbb{R}^2$)

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$$

Metto $y = x^2$ $f(x, x^2) = x^4 + x^4 - 3x^5 = 2x^4 - 3x^5$

Prendendo x enorme ho che $f \rightarrow -\infty$



$\Theta = \text{costante}$, $\rho \rightarrow +\infty$

Comunque scelga la retta $f \rightarrow +\infty$

Lungo $y = x^2$ la funzione

$f \rightarrow -\infty$

Esempio 10 $f(x, y) = x e^{-x^2 - y^2}$

$$f(\rho, \theta) = \rho \cos \theta e^{-\rho^2}$$

$$\boxed{-\rho e^{-\rho^2}} \leq \boxed{\rho \cos \theta e^{-\rho^2}} \leq \boxed{\rho e^{-\rho^2}}$$

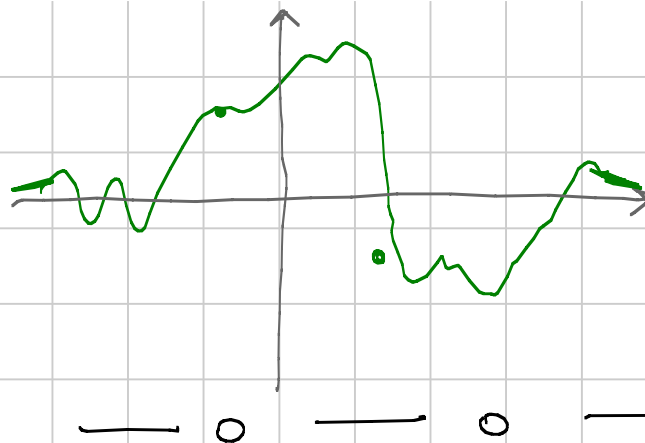
$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0.$ Inoltre esistono p.ti in cui $f > 0$
e punti in cui $f < 0$.

Questo basta per concludere che
esistono max / min.

Dato che esistono, si troveranno in p.ti stazionari.

In 1 variabile



TORNIAMO ALLE FORME QUADRATICHE

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Criterio basato sugli autovalori

* Tutti autov. $> 0 \Rightarrow$ def. pos.

$\geq 0 \Rightarrow$ semi " "

$< 0 \Rightarrow$ def. neg.

$\leq 0 \Rightarrow$ semi " "

NEL CASO PARTICOLARE 2×2 si può decidere il segno degli autov. senza calcolarli?

Siano λ, μ gli autovalori della matrice A

$$\lambda \cdot \mu = \det A$$

$$\lambda + \mu = \text{Tr } A = \text{somma el. sulla diagonale}$$

Conoscendo $\text{Tr } A$ e $\det A$, è facile risalire al segno degli autov.

$\det A = 0 \Rightarrow$ almeno 1 autov. è 0 e l'altro $= \text{Tr } A$

$\det A < 0 \Rightarrow$ autov. $\pm +$ e $\pm -$

$\det A > 0 \Rightarrow$

- $\nearrow +, +$ (in questo caso $\text{Tr } A > 0$)
- $\searrow -, -$ (in questo caso $\text{Tr } A < 0$)

Esempio 1

$$q(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0 \quad + \quad +$$

$$\text{Tr } A = 2 > 0 \Rightarrow + \quad +$$

$\Rightarrow$ forma definita positiva

Esempio 2

$$q(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow + \quad -$$

La forma non è def. pos. / neg.

Esempio 3

$$q(x, y) = x^2 + xy$$

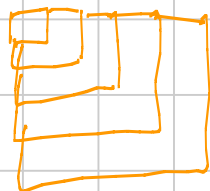
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow + -$$

non definita

METODO DEI MINORI ORLATI = metodo per sapere
segno autoval. senza
calcolarli,

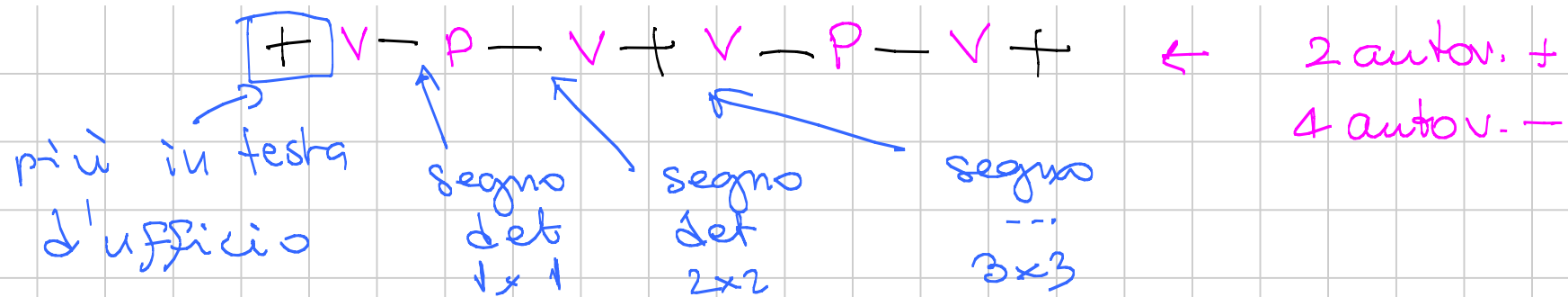
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Si calcolano i determinanti di
tutti i minori così costruiti

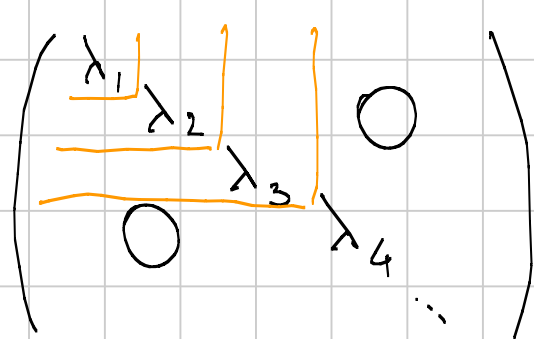
E SI SPERA che vengano $\neq 0$.

Si scrive in successione 1 segno + seguito
dai segni dei det trovati



Allora la matrice originaria ha tanti autov. + quante sono le permanenze di segno, e tanti autov. - quante sono le variazioni

Come si ricorda? Supponiamo che la matrice sia diagonale.



+
 ufficio

segno λ_1

segno $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

ogni volta che introduco un nuovo autov. ho una var. o perm. a seconda del suo segno.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -1$$

Segni:

$$+ P + V - P -$$

2 autov. +
1 autov. $\rightarrow$

E se un det viene $= 0$?

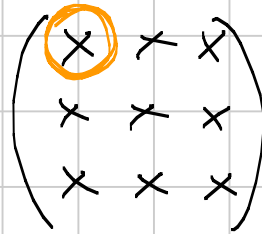
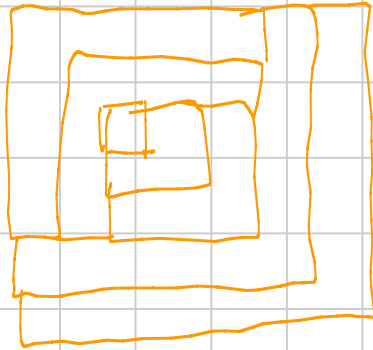
SI PUÒ CAMBIARE DIREZIONE

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

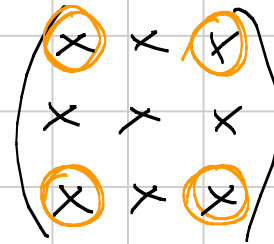


NO! bisogna andare lungo
la diagonale

Si può anche partire dal centro (sempre sulla diagonale)



1



1-3



1-2-3