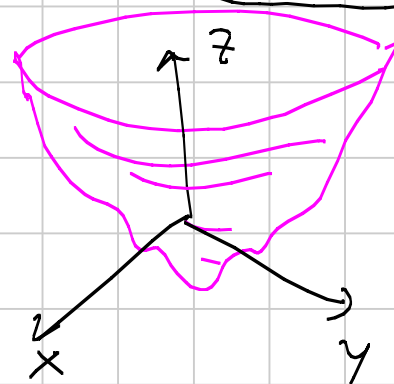


ANALISI II CIV

ORA 17

" $\lim f(x, y) = +\infty$ tutto intorno"

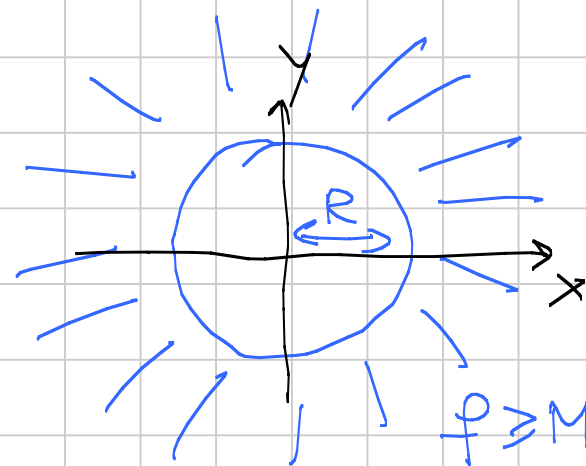
"La funzione diventa enorme man / mano che ci si allontana dall'origine"



Def. Si dice che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

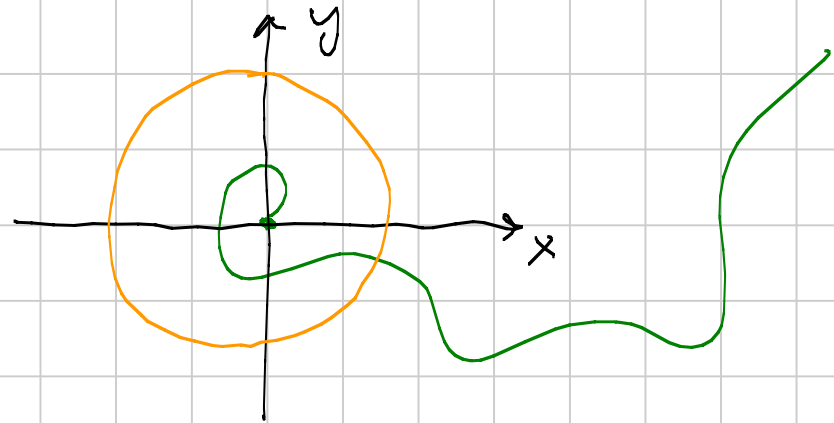
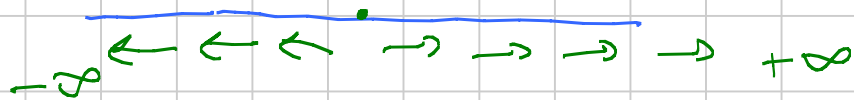
↳ allontanarsi dall'origine



se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists R > 0$ t.c.

$$f(x, y) \geq M$$

$$\forall (x, y) : \|(x, y)\| \geq R$$



Analogamente:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche valori neg.) $\exists R > 0$ t.c.

$$f(x, y) \leq M$$

$\forall (x, y)$ fuori da $B_R(0, 0)$

o ancora $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \text{ t.c. } |f(x, y) - l| \leq \varepsilon \quad \forall (x, y) \text{ fuori da } B_R(0, 0)$$

WEIERSTRASS ESTESO

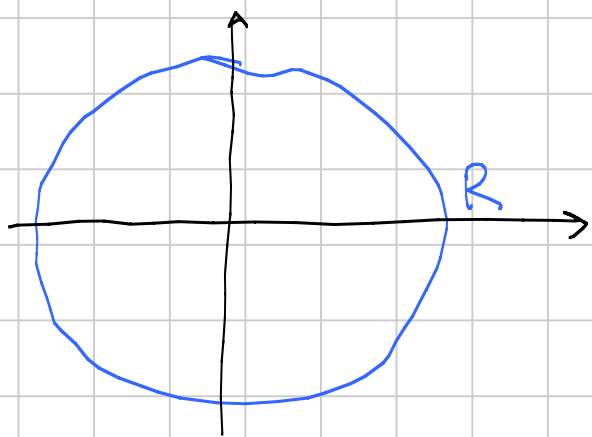
Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e b.c.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty$$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Dim. il minimo, se esiste, sarà $\leq f(0,0)$. Per defniz. di limite,

★ $f(x,y) \geq f(0,0) + 1$ fuori da un cerchio di raggio opportuno



Considero il minimo di $f(x,y)$ in $B_R(0,0)$ (esiste per W.). Dico che è il min non solo dentro B_R , ma su tutto $\mathbb{R}^2$

Sia (x_0, y_0) tale punto.

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_R(0,0)$$

Inoltre

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0) \leq f(x,y) - 1 < f(x,y)$$

della $\star$

per ogni (x,y)
fuori da $B_R(0,0)$

— o — o —

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy. \quad \text{Se sapessimo che}$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

per W. esteso sapremmo che $\exists$ min su tutto $\mathbb{R}^2$. Ma allora si troverebbe in un p.to stazionario e quindi si sa trovare,

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 + y = 0 \\ 4y^3 + x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x^3 \\ 4(-4x^3)^3 + x = 0 \end{cases} \quad \text{sost. nella 2^a}$$

$$-256x^9 + x = 0; \quad x(-256x^8 + 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x^8 = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \mp \frac{1}{2}$$

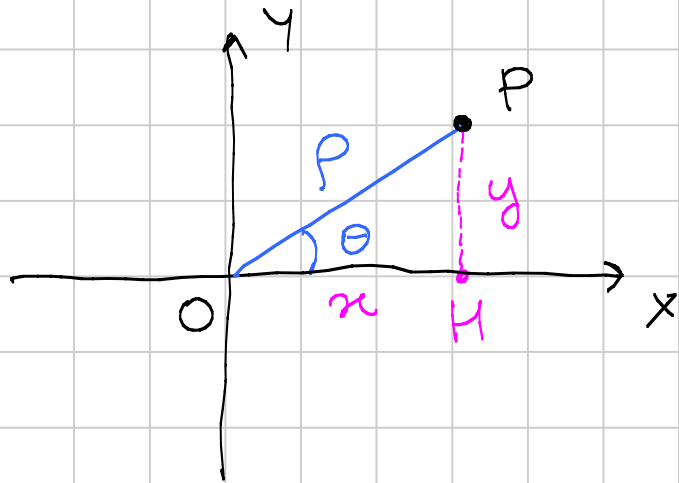
RICARDO
DA
19 EQ.

PUNTI STAZ.:

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Sostituendolo si vede quale / quali sono i pti di min.

COORDINATE POLARI NEL PIANO



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [\rho \geq 0]$$

Θ = angolo definito a meno di multipli di 2π

$$x = \rho \cos \Theta \quad y = \rho \sin \Theta$$

Fare un lim $\underset{x^2+y^2 \rightarrow +\infty}{\quad}$ equivale a fare un limite per $\rho \rightarrow +\infty$

Se ho $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6 \sin(xy) + 5x$

Cosa diventa in coord. polari?

$$f(p, \theta) = p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta + 6 \sin(p^2 \sin \theta \cos \theta) + 5p \cos \theta$$

$\uparrow$
 sost.

$$= p^2 + 6 \sin() + 5p \cos \theta$$

Voglio dimostrare che $f(p, \theta) \rightarrow +\infty$ quando $p \rightarrow +\infty$, indipendentemente da θ .

Per farlo rigorosamente, usiamo il confronto

$$\boxed{p^2 + 6 \sin() + 5p \cos \theta} \geq \boxed{p^2 - 6 - 5p}$$

$\downarrow$
 $+\infty$ per confronto

$\downarrow$
 $+\infty$ per $p \rightarrow +\infty$

Esempio 8 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 7y + 522x$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Passo in coord. polari:

$$\begin{aligned} f(\rho, \theta) &= \rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522\rho \cos \theta \\ &= \rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522\rho \cos \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522\rho \cos \theta} \geq \boxed{\rho^2 - 7\rho - 522\rho}$$

$\downarrow$
 $+\infty$ per confronto

$\downarrow$
 $+\infty$

Esempio 7 $f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta + \rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\boxed{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta} \geq \boxed{c \rho^4 - \rho^2} \quad \boxed{c > 0}$$

$\downarrow$ $+\infty$ per congruenza $\downarrow$ $+\infty$ per colpa di $c \rho^4$

Perché $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq C$ con $C > 0$

Prendo la funzione $g(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$. Questa funzione, quando θ varia da 0 a 2π , assume da qualche parte il suo minimo (per W.). Questo minimo non può essere 0, perché $\sin \theta$ e $\cos \theta$ non possono essere contemp. nulli. Pertanto il min. sarà un certo $C > 0$ $g(\theta) \geq C$

$$p^4 \cos^4 \theta + p^4 \sin^4 \theta - p^2$$

Se $\cos \theta \neq 0$, allora

$$p^4 \cos^4 \theta + p^4 \sin^4 \theta - p^2 \geq \boxed{p^4 \cos^4 \theta - p^2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$
 $\downarrow$
 $+\infty$

Se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^4 \theta = 1$

$$p^4 \cos^4 \theta + p^4 \sin^4 \theta - p^2 \geq \boxed{p^4 - p^2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

$\Rightarrow$ IN OGNI CASO $\rightarrow +\infty$

NOOOOOO!!!!