

ANALISI II ^{CIV} (NUCL)

Titolo nota

ORA 16

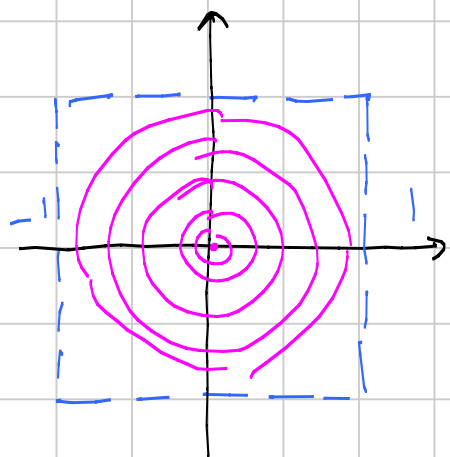
24/10/2006

- Introduzione ai pb. di max / min su insiemi non limitati (non chiusi)
- Limiti all' ∞ per funzioni di n variabili
↳ coord. polari
- Metodo dei minori orlati
- Studio locale di funzioni di n variabili

MAX / MIN su insiemi limitati, ma non chiusi

Non si può applicare Weierstrass $\Rightarrow$ max e min non sono obbligati ad esistere

Esempio 1 Max / min di $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul quadrato $(-1,1) \times (-1,1)$



min = 0 p.to di min: (0,0)

max : N.E.

Sup = 2

[il max vorrebbe essere nei 4 vertici che però non appartengono all'insieme]

valore di $f(x,y)$
nei 4 vertici

In generale: devo calcolare (se esistono) max/min di $f(x,y)$ su un insieme A limitato, ma non chiuso.

Se si può, risolvo il problema sulla "chiusura di A " (A unito il suo bordo). Qui max e min esistono per W .

occorre che f si estenda alla chiusura in modo continuo

In fine quando se i pti di max/min stanno in A o sul bordo.

Esempio 2 $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x}$$

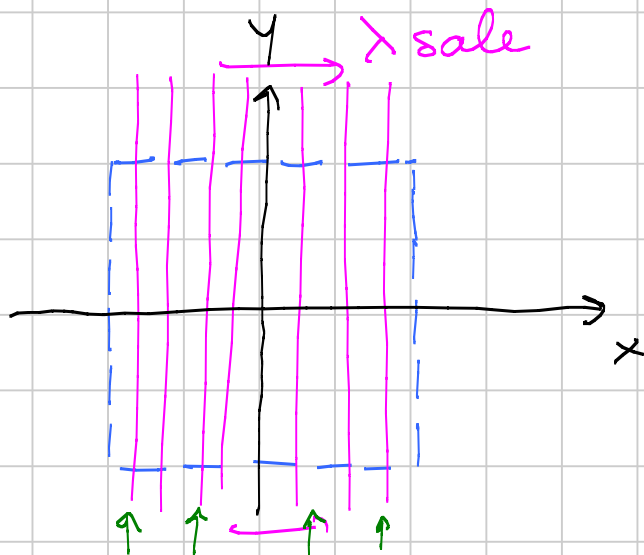
max/min N.E.

$$f(x,y) = \lambda$$

$$\frac{1}{1-x} = \lambda$$

$$1-x = \frac{1}{\lambda}$$

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$



Il min vorrebbe essere sul lato di dx , quindi

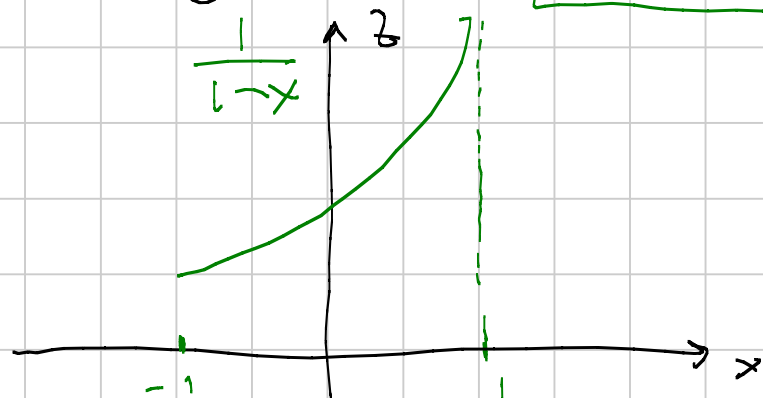
$$\inf f = \frac{1}{2}$$

Il max vorrebbe essere sul lato di dx , sul quale f non è nemmeno definita (sul quadrato chiuso non avrei nemmeno potuto considerare il problema).

Ma mano che ci si avvicina al lato di dx $x \rightarrow 1^-$, quindi $f \rightarrow +\infty$.

Conseguenza:

$$\sup = +\infty$$



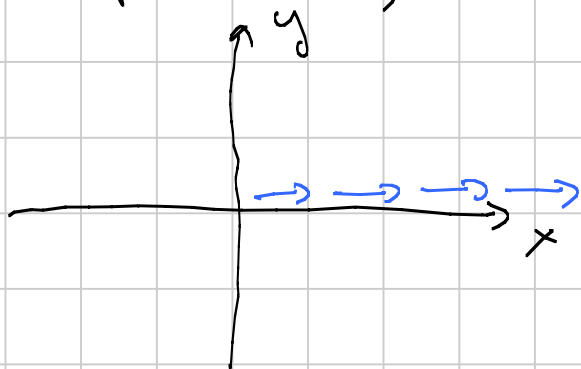
Esempio 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\min = \inf = 0 \quad \text{p.to min: } (0, 0)$$

$$\sup = +\infty, \quad \max \text{ N.E.}$$



un omicino che fa questo percorso vede

$$f(0, x) = x^2, \text{ che tende a } +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$y=0, x \text{ enorme}$$

N.B. INF e SUP esistono
per forza

MAX e MIN possono
non esistere

Esempio 2

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

$$\inf = -\infty \quad (x=0, y \text{ enorme})$$

$$\max \text{ N.E.}$$

$$\min \text{ N.E.}$$

Esempio 3

$$f(x, y) = xy$$

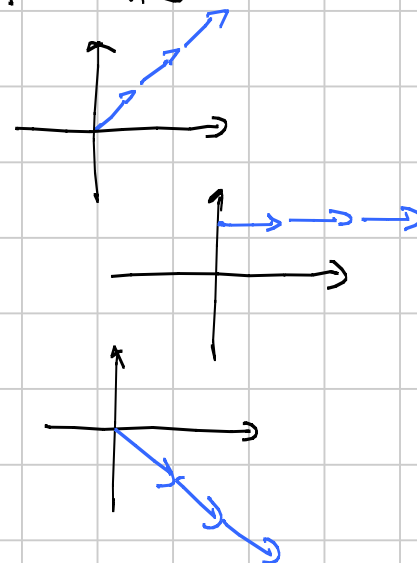
$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty \quad (y = x \text{ e } x \text{ enorme})$$

$$\max: \text{N.E.} \quad (y = 3 \text{ e } x \text{ enorme})$$

$$\inf = -\infty \quad (y = -x \text{ e } x \text{ enorme})$$

$$\min: \text{N.E.} \quad (y = 3 \text{ e } x \text{ enorm. neg.})$$



Esempio 4

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty \quad (y = 0, x \text{ enorme})$$

$$\max \text{ N.E.}$$

$$\inf = -\infty \quad (y = 0, x \text{ enorm. neg.})$$

Esempio 5

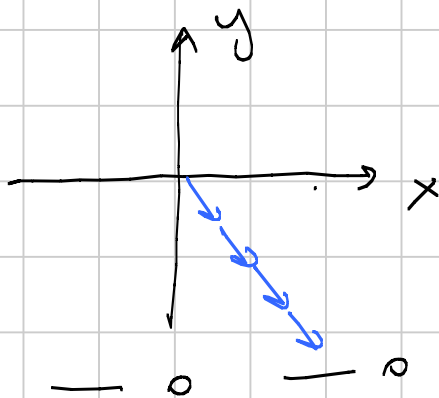
$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

$$\inf = -\infty \quad (y = -x \leadsto \text{diventa } f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + x^2 = -x^2$$

con x enorme $\rightarrow -\infty$)

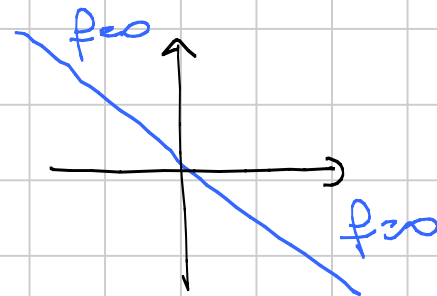


Esempio 6

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$$

$$\sup = +\infty \dots$$

$$y = -x \quad f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 0$$



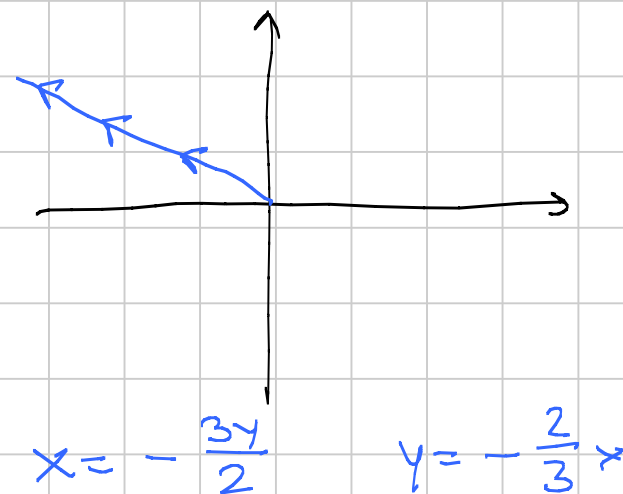
$$\begin{aligned}
 x^2 + 3xy + 2y^2 &= \left[x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \left(\frac{3y}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{3y}{2} \right)^2 + 2y^2 \\
 &= \left(x + \frac{3y}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} y^2
 \end{aligned}$$

COMPLETAMENTO
DEI QUADRATI

Poniamo $x = -\frac{3y}{2}$, e y enorme

$$f\left(-\frac{3y}{2}, y\right) = -\frac{1}{4} y^2 \rightarrow -\infty$$

$$\inf f = -\infty$$



Esempio 7 $f(x, y) = x^4 + y^4 + xy$

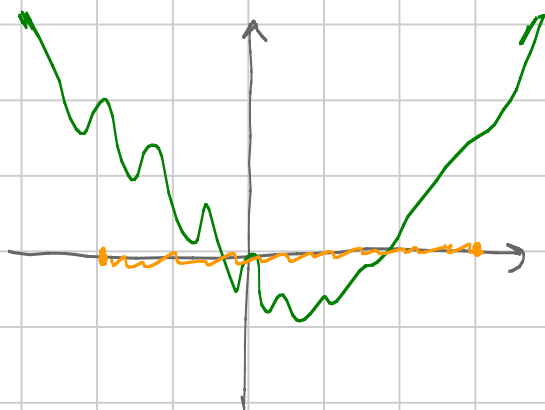
$$A = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty$$

Max N.E.

($y=0$, x enorme)

In 1 variabile



$$f(x) = x^4 - 17x^2 + \sin x^3 \quad A = \mathbb{R}$$
$$\sup = +\infty \quad (x \text{ enorme})$$

Weierstrass esteso; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$