

ANALISI II CIV

ORA 15

FORME QUADRATICHE E MATRICI

||

polinomio in n variabili con tutti termini di grado 2

Esempi $\boxed{n=2}$ $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Le forme quadratiche intervengono come termini di grado 2 nei pol. di Taylor

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{SIMMETRICA}$$

$$q(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(x,y) \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$= x(ax+by) + y(bx+cy)$$

$$= ax^2 + bxy + byx + cy^2$$

Ad ogni forma corrisponde una matrice SIMMETRICA
 in $\uparrow$ n VARIABILI $\uparrow$ $n \times n$
 e VICEVERSA

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 6xy + z^2 - 3yz$$

metà di
6

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow q(x, y, z) = y^2 + 2z^2 + 6xy + 10xz$$

— 0 — 0 —

$$f_{xx}(0,0) x^2 + 2 f_{xy}(0,0) xy + f_{yy}(0,0) y^2 = q(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

MATRICE HESSIANA DI
f in (0,0) $H_f(0,0)$

Def. Una forma quadratica (o una matrice simm.)
si dice

DEFINITA POSITIVA se $q(x,y) > 0$ per ogni
 $(x,y) \neq (0,0)$

" NEGATIVA se $q(x,y) < 0$ per ogni
 $(x,y) \neq (0,0)$

SEMIDEFINITA POSITIVA se $q(x,y) \geq 0$ per ogni (x,y)
" NEGATIVA se $q(x,y) \leq 0$ "

Problema: data una forma, stabilire se ricade in una
di queste 4 categorie

Oss. Una forma non è obbligata a cadere in una delle 4 categorie

$$q(x, y) = x^2 - y^2$$

positiva in $(1, 0)$
negativa in $(0, 1)$

Si dice in questo caso che è NON DEFINITA

METODI

- ↗ Completamento dei quadrati ①
- Autovalori ②
- ↘ Minori ORLATI ③

Metodo ② Calcolo gli autovalori della matrice.
Essendo la matrice simmetrica, vengono per forza numeri REALI

La forma risulta

* DEF. POS. se tutti gli autov. sono > 0

* SEMI " " " " ≥ 0

DEF NEG < 0

SEMI " " " " ≤ 0

NON DEFINITA se ci sono autov. pos. e autov. neg.

Esempio $q(x, y) = x^2 - y^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gli autovalori sono gli el. della diagonale (è vero perché la matrice è DIAGONALE), dunque uno pos. e uno neg $\Rightarrow$ non definita.

$$q(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y^2$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$$= (x+y)^2 + 2y^2$$

Esseulo somma di 2 $\square$, sarà sempre ≥ 0 . Quando si annulla?

Se e solo se $x+y=0$ e $y=0$, cioè
per $(x,y)=(0,0)$

Quindi è definita positiva.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + y^2 \\ &= x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
DOPPIO
PRODOTTO

$\square + \square \Rightarrow$ definita positiva

$$q(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + y^2$$

$$\underline{x^2} + \underline{2xy} + \underline{xy} + \underline{y^2}$$

$$(x+y)^2 + \boxed{xy}$$

No $\square$

$$= x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9y^2}{4} - \frac{5}{4}y^2$$

$$= \left(x + \frac{3y}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

$$= \square - \square$$

NON DEFINITA

Se voglio $q(x, y) > 0$ basta prendere $y = 0$, x qualunque

$q(x, y) < 0$ basta prendere $x + \frac{3y}{2} = 0$
e y qualunque

Esempio di $q(x,y)$ semidef. pos., ma non def. pos.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x-y)^2 \end{aligned}$$

$$q(x,y) \geq 0 \quad \text{per ogni } (x,y)$$

Quando $q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ dunque si annulla anche per $(x,y) \neq (0,0)$