

ANALISI II CIVILI (NUCL.)

Titolo nota

ORA 14

18/10/2006

- * Formula di Taylor in + variabili
- * Forme (o matrici) definite positive / negative
— o — o —

TAYLOR IN 1 VARIABILE centro $x_0 = 0$

Data una funzione f ed un intero positivo n , esiste un polinomio $P_n(x)$ tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{o(x^n)}$$

resto che tende a zero
+ velocemente di x^n

↑
RESTO DI PEANO

Inoltre

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Se conosco tutte le derivate di f (fino alla n -esima) nel p.to $x=0$, posso determinare $P_n(x)$

RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

RESTO
DI
LAGRANGE

Dato x , esiste un p.to ξ compreso tra 0 e x per cui vale la formula di sopra

In 2 variabili

centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Data $f(x, y)$ ed n esiste un unico polinomio $P_n(x, y)$
tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x, y) = P_n(x, y) + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^n\right)$$

↑
polinomio di
2 variabili

RESTO DI
PEANO

Formula per $P_n(x, y)$

$$P_n(x, y) = f(0, 0) + \\ + \left[f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \right] \cdot \frac{1}{1!} +$$

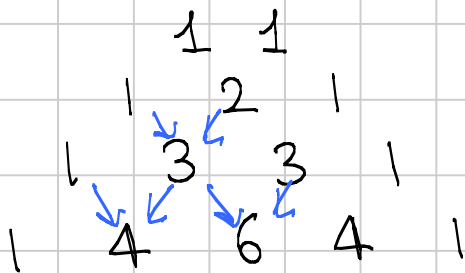
$$+ \frac{1}{2!} [\boxed{1} f_{xx}(0,0) x^2 + \boxed{2} f_{xy}(0,0) xy + \boxed{1} f_{yy}(0,0) y^2]$$

è come se ci fossero
sia xy sia yx

$$+ \frac{1}{3!} [\boxed{1} f_{xxx}(0,0) x^3 + \boxed{3} f_{xxy}(0,0) x^2 y + \boxed{3} f_{xyy}(0,0) x y^2 + \boxed{1} f_{yyy}(0,0) y^3]$$

CORRETTO
DOPPO
↓

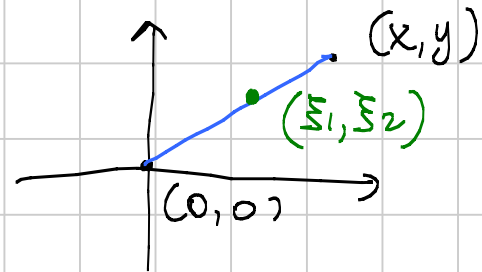
$$+ \frac{1}{4!} [\boxed{1} f_{xxxx}(\cdot) x^4 + \boxed{4} f_{xxx y}(\cdot) x^3 y + \boxed{6} f_{xx yy}(\cdot) x^2 y^2 + \dots]$$



TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

RESTO DI LAGRANGE ; il resto è come se fosse il termine successivo, solo che le derivate non sono calcolate in $(0,0)$, ma in punto (ξ_1, ξ_2) appartenente al segmento che congiunge (x,y) con $(0,0)$



Operativamente, come si calcola?

Ricordando i polinomi di Taylor in 1 variabile!

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

| $\sin t$ e $\cos t$
sono come $\sin t$ e $\cos t$,
solo con tutti +

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

Esempi ① $f(x,y) = e^{xy}$

$$e^{xy} = \boxed{1 + xy} + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

il termine
successivo

$\frac{x^2y^2}{2}$ è di
grado 4

Calcolare $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}(0,0) = 0$

È il coeff. che compare
in $P_5(x,y)$ davanti a x^3y^2 ,
ma questo termine NON
c'è nel polinomio.

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = x \sin(x+y) \quad P_3(x, y)$$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{6} + \dots$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \dots$

↑ INUTILE

Moltiplico per x :

NON ENTRA NEL $P_3(x, y)$

$$x \sin(x+y) = x(x+y) - \boxed{x \frac{(x+y)^3}{6} + \dots}$$

$$P_3(x, y) = x^2 + xy \quad ! \text{ i termini successivi hanno grado } \geq 4$$

Cosa si può dire delle derivate terze di f in $(0,0)$?

Sono tutte $= 0$.

③

$$\sin(xy) \cos(x+y)$$

$P_4(x,y)$

$$\sin(xy) = xy - \frac{x^3y^3}{6} + \dots$$

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{24} + \dots$$

$\uparrow 4!$

$$\sin(xy) \cos(x+y) = xy - \frac{xy(x+y)^2}{2}$$

$P_4(x,y)$

Tutto il resto
è di grado > 4