

CIVILI ANALISI II

ORA 13

$$\lambda = + \frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$\lambda = - \frac{\sqrt{10}}{4}$$

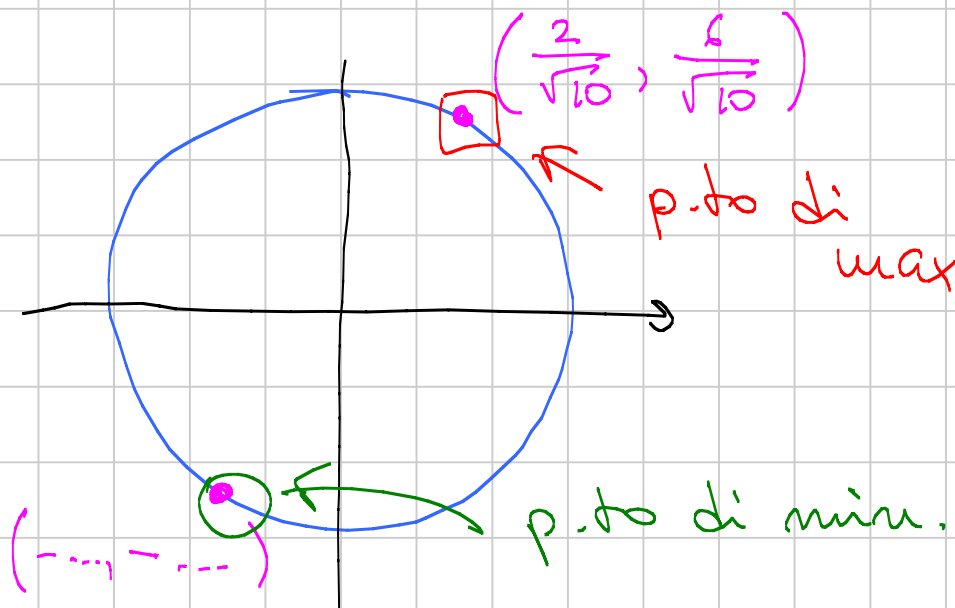
$$x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$y = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$x = \frac{1}{2\lambda} = - \frac{2}{\sqrt{10}}$$

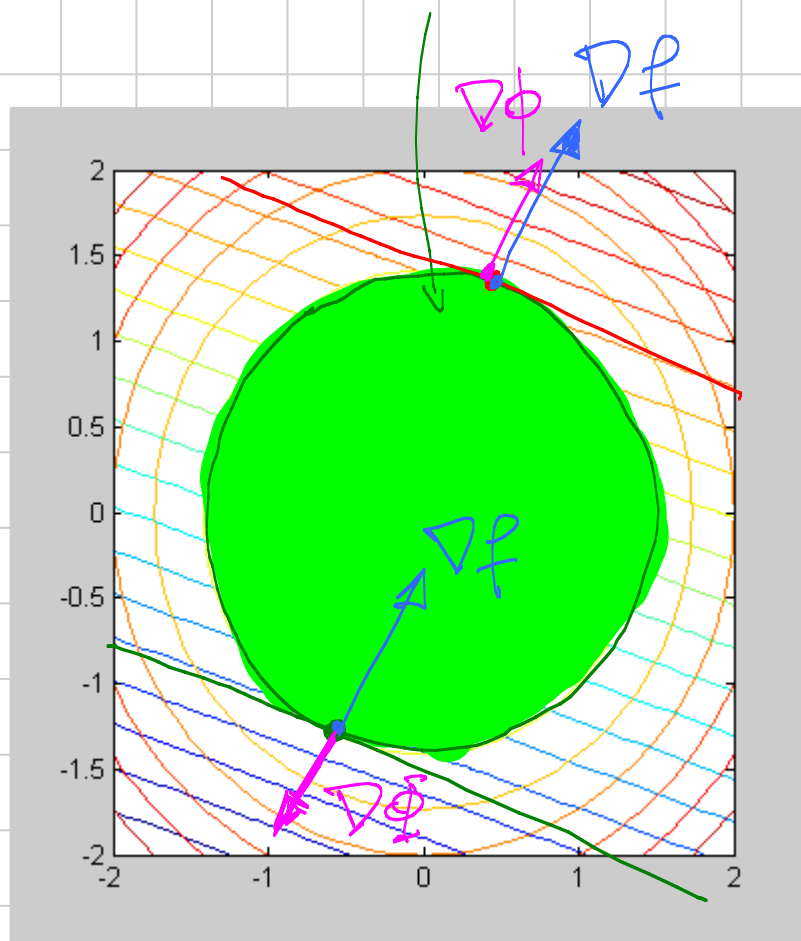
$$y = - \frac{6}{\sqrt{10}}$$

candidati



$$f(x, y) = x + 3y$$

Insieme A



Rette = linee di livello di f
 $x + 3y = \lambda$

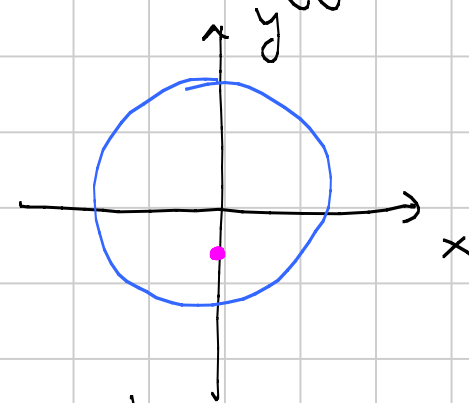
Cerchi: linee di livello di Φ
 $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = \lambda$

L'insieme A è quello che ha
 come bordo $\Phi = 0$

Nei p.ti di max / min di f sul
 bordo di A, le linee di livello
 di f sono tangenti a quelle di Φ
 Poiché le linee di livello sono
 tangenti, i gradienti (ad esse $\perp$)
 devono essere $\parallel$, di qui $\nabla f = \lambda \nabla \Phi$

Esempio 2 $A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

$$f(x,y) = x + xy$$



* Sing. interni : $\emptyset$

* Stat. interni

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

* Bordo : è il luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

1° SISTEMA : Nessuna soluzione

2° SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1+y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = 2\lambda x - 1 \quad (1^a \text{ eq.}) \quad \text{Sost. nella } 2^a$$

$$x = 2\lambda (2\lambda x - 1) = 4\lambda^2 x - 2\lambda$$

$$x (1 - 4\lambda^2) = -2\lambda$$

$$x = \frac{-2\lambda}{1 - 4\lambda^2}$$

$$y = 2\lambda x - 1 = 2\lambda \left(\frac{-2\lambda}{1 - 4\lambda^2} \right) - 1$$

$$= \frac{-4\lambda^2 - 1 + 4\lambda^2}{1 - 4\lambda^2} = -\frac{1}{1 - 4\lambda^2} = y$$

Sostituisco nella 3^a

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{4\lambda^2}{(1 - 4\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1 - 4\lambda^2)^2} = 4$$

ricavo λ
 $\downarrow$
 ricavo x e y

Esempio 3 $f(x, y) = x^2 + 3y^2$

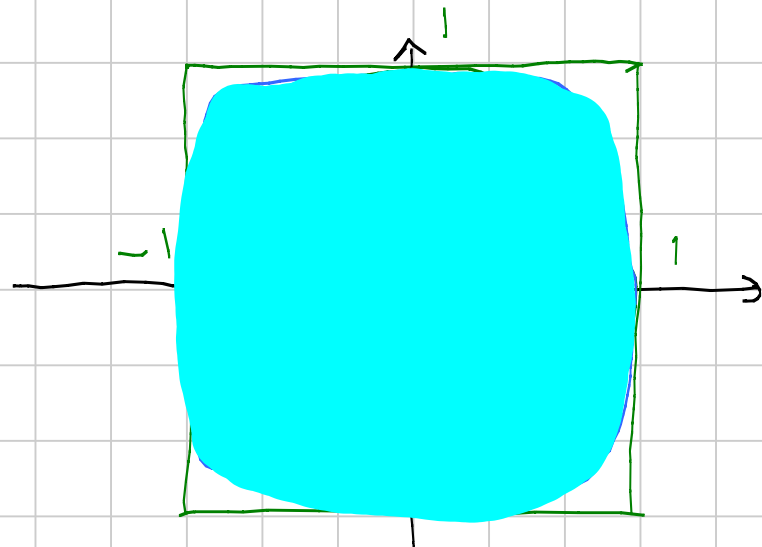
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1 \}$$

A è limitato? Sì, infatti di sicuro $-1 \leq x \leq 1$
 $-1 \leq y \leq 1$

A è chiuso? "Sì, perché c'è il $\leq$ e non solo il $<$ "

Come è fatto A?
Sta dentro al quadrato

È + grande o + piccolo
del cerchio?



Prendo P sul bordo del cerchio

$P(x, y)$

$$x^4 + y^4 < x^2 + y^2 = 1$$

Le coordinate di P verificano con il < l'eq. di A

Conclusione: A è + piccolo del $\square$ e + grande del $\circ$

A è un "televisore"

Stessa cosa vale per gli insiemi del tipo

$$x^6 + y^6 \leq 1, \quad x^8 + y^8 \leq 1, \quad |x|^7 + |y|^7 \leq 1$$

+ l'esponente sale, + il televisore tende al $\square$

Tornando all'esercizio.

Sing. int.: $\emptyset$

Staz. int.: $(0,0)$

Bordo = luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

NO SOLUTIONS

2° SISTEMA

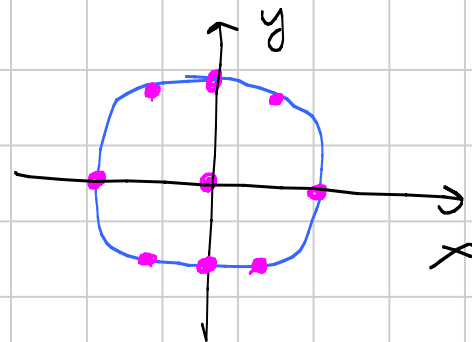
$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 4x^3 \\ 6y = \lambda \cdot 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 4x^3 \\ 3y = \lambda \cdot 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1st equations

$$x - 2\lambda x^3 = 0$$

$$x(1 - 2\lambda x^2) = 0$$



$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$x^4 = \frac{1}{4\lambda^2}$$

$$1 - 2\lambda x^2 = 0$$

↓ 2nd eq.

$$3y - 2\lambda y^3 = 0$$

$$y(3 - 2\lambda y^2) = 0$$

$$y^2 = \frac{3}{2\lambda}$$

$$y^4 = \frac{9}{4\lambda^2}$$

$$3 - 2\lambda y^2 = 0$$

↓

$$y = 0$$

↓ 3rd eq.

$$x = \pm 1$$

$$x = 0$$

↓ 3rd eq.

$$y^4 = 1$$

$$y = \pm 1$$

3^a eq,

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1$$

$$4\lambda^2 = 10, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Questo non
produce
nulla

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$y^2 = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Vengono fuori 4 p.ti $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right)$

i segni si possono prendere
in 4 modi

Non resta ora che sostituire i 3 p.ti.

