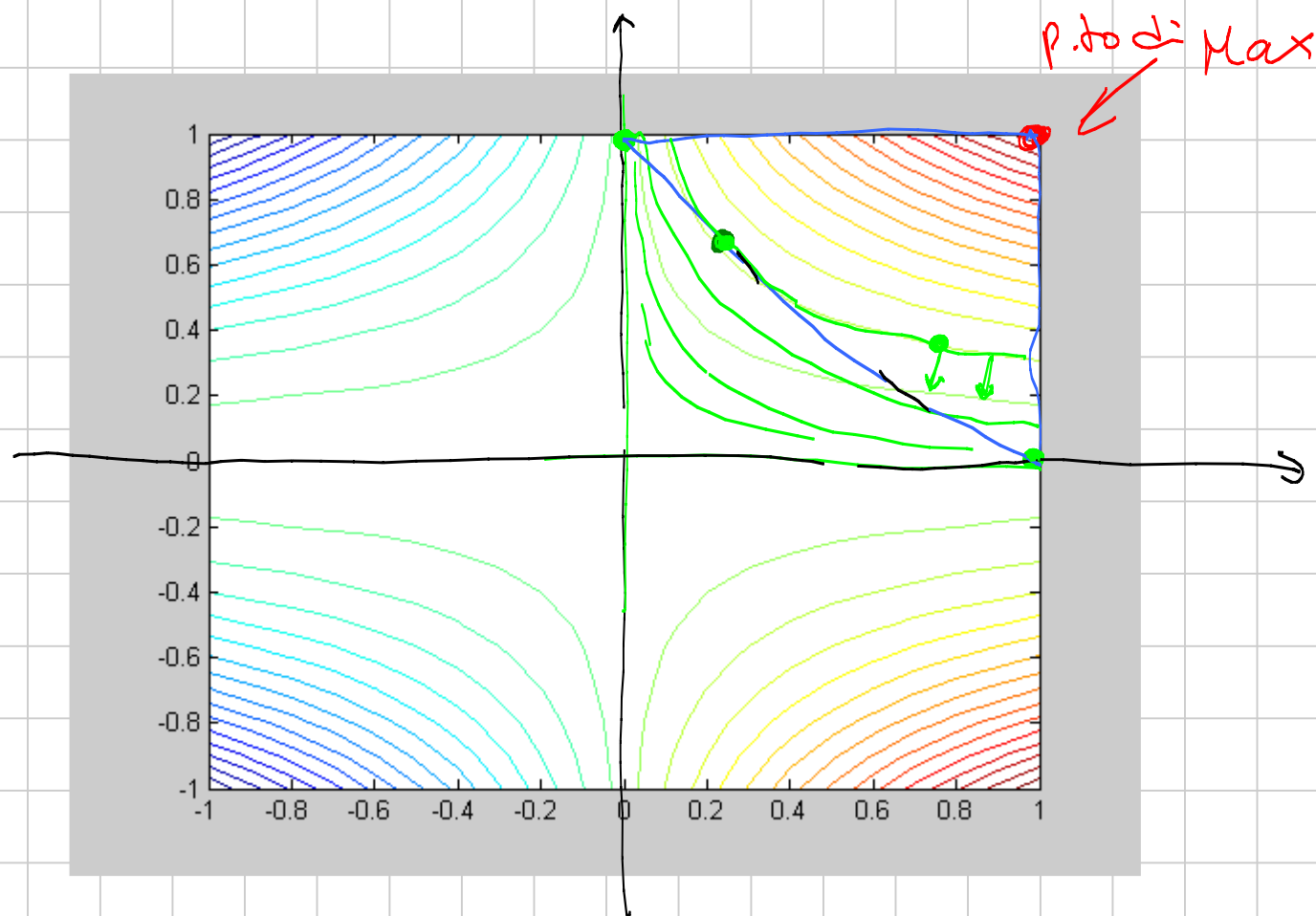


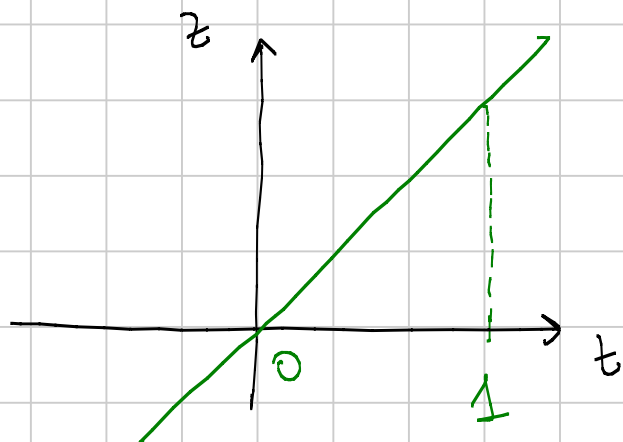
ANALISI II CIN

ORA 12



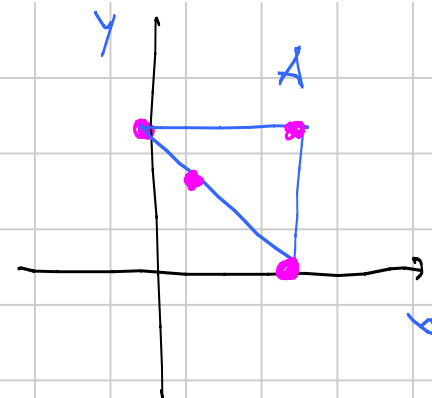
$f(x,y)=0$
↕
i 2 ass.

Punto ① $\varphi_1(t, 1) = t \quad t \in [0, 1]$

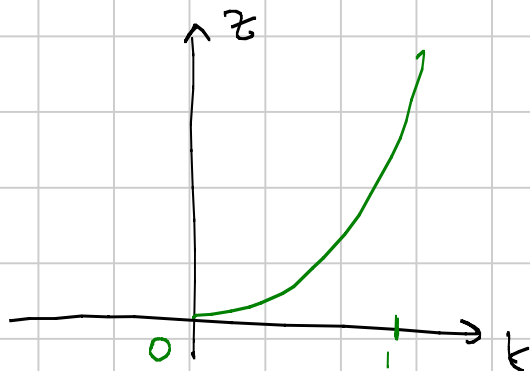


max per $t=1$

min per $t=0$



Punto ② $\varphi_2(t) = f(1, t) = t^2 \quad t \in [0, 1]$



max per $t=1$

min per $t=0$

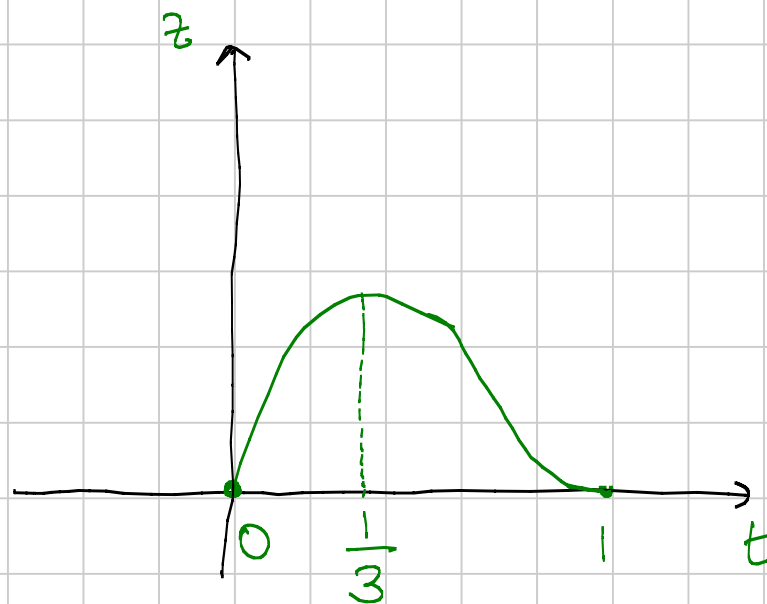
Punto ③ $\varphi_3(t) = f(t, 1-t) = t(1-t)^2 \quad t \in [0, 1]$

$$\varphi_3'(t) = (1-t)^2 - t - 2(1-t)$$

$$= 1 - 2t + t^2 - 2t + 2t^2$$

$$= 3t^2 - 4t + 1$$

$$= (3t-1)(t-1)$$

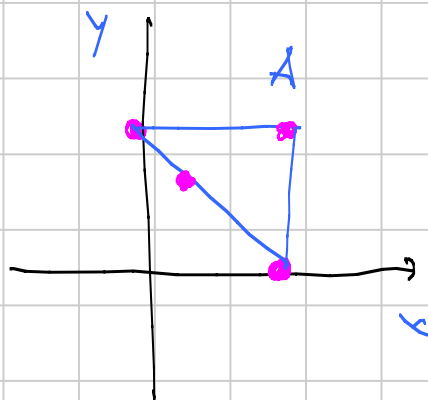


$$\varphi_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t=1 \text{ oppure } t=\frac{1}{3}$$

$$\varphi_3'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

max per $t = \frac{1}{3} \rightarrow$ corrisponde a $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$

min per $t=0$ e $t=1 \rightarrow$ corr. ai 2 estremi del
punto 3



Conclusione : ho 4 candidati

$$(1,0)$$

$$f(1,0) = 0$$

min

$$(1,1)$$

$$f(1,1) = 1$$

Max

$$(0,1)$$

$$f(0,1) = 0$$

min

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$\text{Max} = 1$$

p.to di max : $(1,1)$

$$\text{min} = 0$$

p.ti di min : $(0,1)$ e $(1,0)$

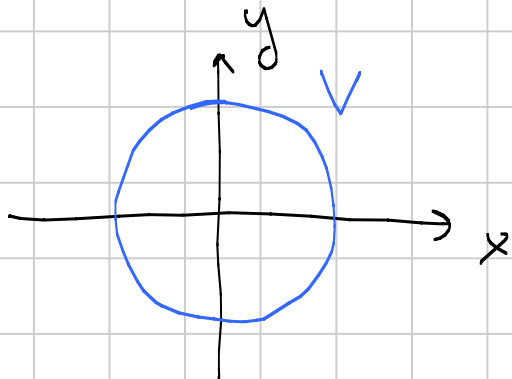
MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice luogo di zeri se esiste una funzione $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ b.c.

$$V = \{ (x, y) : \Phi(x, y) = 0 \}$$

Equazione di V

Esempio $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 3}_{\Phi(x, y)} = 0 \}$



solo il bordo!!!

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Sia V il luogo di zeri di una funzione $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Sia poi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

I p.ti di max / min di f su V sono da ricercarsi in queste 2 categorie

* PUNTI SINGOLARI SUL BORDO^(su V), cioè p.ti di V in cui $\nabla \Phi = 0$. Questi si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Nota bene: 3 equazioni, 2 incognite: x, y
"SPESSE" il sistema non ha soluzioni

* PUNTI STAZIONARI SUL BORDO (su V), cioè p.ti di V in cui ∇f e $\nabla \Phi$ sono paralleli, cioè esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f = \boxed{\lambda} \nabla \Phi$$

multiplicatore

Questi punti si trovano risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{array} \right\} \quad \nabla f = \lambda \nabla \Phi$$

} appartenere a V

3 equazioni

3 incognite : x, y, λ

"DI SOLITO" vengono fuori un po' di punti.

Operativamente:

- scrivo il bordo che mi interessa come luogo di zeri di una certa Φ
- risolvo il 1° sistema
$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

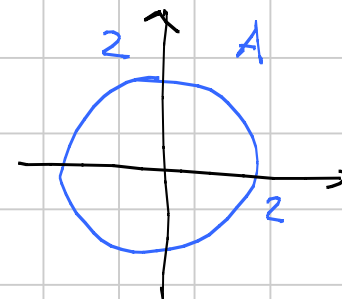
Tutte le sue soluzioni sono candidati

- * risolvo il 2° sistema
$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono delle terne (x, y, λ) . Mi dimentico di λ e le coppie (x, y) così ottenute le metto fra i candidati.

Esempio $f(x,y) = x + 3y$

A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2.



* Stat. interi $\begin{cases} f_x \geq 0 \\ f_y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

* Sing. interi : $\emptyset$

* Bordo = $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 4}_{\Phi(x,y)} = 0 \}$

1° Sistema

NO
SOLUZIONI

$$\begin{cases} \Phi_x \geq 0 \\ \Phi_y \geq 0 \\ \Phi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x = 0$
 $\rightarrow y = 0$
INCOMPATIBILI

$$2^{\circ} \text{ sistema } \begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2\lambda} \\ y &= \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

Sost. nella 3^a eq.

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 4$$

$$10 = 16\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \boxed{\frac{10}{16}} = \frac{5}{8}$$

$\lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$. Noto λ , ricavo x e y e ho i candidati